Catalan-Fuß-Kombinatorik für Spiegelungsgruppen

Mischa Kenn

February 20, 2010

Abstract

Zusammenfassung Vorlesung Prof. Krattenthaler WS09/10

1 Spiegelungsgruppen

Definition 1 (Spiegelungsgruppe)**.** *Eine Spiegelungsgruppe ist eine Gruppe die durch Spiegelungen im $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird.*

Sei H_α die Hyperebene durch den Ursprung normal auf den Vektor α. Die Spiegelung s_α an der Hyperebene ist dann

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \tag{1}$$

Jede Spiegelungsgruppe die 0 fixiert ist eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(\mathbb{R}^n)$.

Definition 2 (Wurzelsystem)**.** *Ein Wurzelsystem Φ ist eine endliche Menge von Normalvektoren auf Hyperebenen für die gilt:*

1. $\forall \alpha \in \Phi : \mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$
2. $\forall \alpha \in \Phi : s_\alpha(\Phi) = \Phi$

Definition 3 (Weylgruppe)**.** *Die Gruppe $W(\Phi)$ die durch die s_α, $\alpha \in \Phi$ erzeugt wird heißt Weylgruppe.*

Definition 4 (Positive Wurzeln)**.** *Alle Elemente von Φ die auf einer Seite einer beliebig gewählten Hyperebene H durch den Ursprung, die selbst keine Wurzeln enthält, liegen nennt man positive Wurzeln (Φ^+). Die anderen heißen negative Wurzeln (Φ^-). Es gilt $\Phi = \Phi^+ \cap \Phi^-$.*

Definition 5 (Einfache Wurzeln)**.** *Eine minimale Teilmenge $\Pi \subset \Phi^+$ die alle Elemente von Φ^+ aufspannt heißt einfaches Wurzelsystem.*

Satz 1. *Das einfaches Wurzelsystem $\Pi \subset \Phi^+$ ist eindeutig bestimmt, jedes Element aus Φ^+ ist Linearkombination der Elemente aus Π mit nichtnegativen Koeffizienten.*

Definition 6 (Einfache Spiegelung)**.** *s_α heißt einfache Spiegelung falls $\alpha \in \Pi$. $S(\Pi) = \{s_\alpha | \alpha \in \Pi\}$ bezeichnet die Menge aller einfachen Spiegelungen.*

Satz 2. 1. *$S(\Pi)$ erzeugt $W(\Phi)$*

2. *Falls sowohl S_1 also auch S_2 W erzeugen so sind sie konjungiert, d.h. $\exists w \in W : S_1 = wS_2w^{-1}$, $|S| = n$ heißt der Rang von W.*

3. *Die abstrakte Gruppe die durch* $\langle \{s_1, s_2, \dots s_n\}, s_i^2 = 1, (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1,\, m_{ij} = 2\pi/\angle(\alpha_i, \alpha_j) \rangle$ *definiert ist, ist isomorph zu* $W(\Phi)$.

Definition 7 (Coxetergruppen)**.** *Abstrakte Gruppen der Form* $\langle \{s_1, s_2, \dots s_n\}, s_i^2 = 1, (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1,\, m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \rangle$ *heißen Coxetergruppen.*

Satz 3. *Endliche Spiegelungsgruppen und endliche Coxetergruppen sind dieselben Gruppen.*

Definition 8 (irreduzible Spiegelungsgruppen)**.** *Eine Spiegelungsgruppe* W *heißt irreduzibel, falls sie nicht in ein direktes Produkt von kleineren Spiegelungsgruppen zerlegbar ist.*

Satz 4. *Sei* $W = W_1 \times W_2$.

1. *Es gibt es eine Zerlegung* $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ *mit* $V_1 \perp V_2$.

2. V_1 *und* V_2 *sind unter* W_1 *und* W_2 *invariant.*

3. V_1 *wird von* W_2 *und* V_2 *wird von* W_1 *punktweise fixiert.*

Definition 9 (Dynkindiagramme)**.** $\underset{s}{\bullet} \overset{m}{-} \underset{t}{\bullet}$ *bedeutet* $(st)^m = 1$. *"*$\bullet$*" steht dabei für einen Erzeuger. Per Konvention gilt:* $\bullet - \bullet$ *äquivalent* $\bullet \overset{3}{-} \bullet$

Satz 5 (Klassifikation der irreduziblen Spiegelungsgruppen)**.** *Es gibt 4 unendliche Familien und 6 sporadische Gruppen:*

A_n	$\bullet - \bullet - \bullet \cdots \bullet$	$\lvert A_n\rvert = (n+1)!$, $(A_n = S_{n+1})$
B_n	$\bullet - \bullet - \bullet \cdots \bullet \overset{4}{-} \bullet$	$\lvert B_n\rvert = 2^n n!$
D_n	$\bullet - \bullet - \bullet \cdots \bullet \langle \substack{\bullet \\ \bullet}$	$\lvert D_n\rvert = 2^{n-1} n!$
$I_2(m)$	$\bullet \overset{m}{-} \bullet$	$\lvert I_2(m)\rvert = 2m$ *(Diedergruppe)*
E_6	$\bullet - \bullet - \overset{\overset{\bullet}{\mid}}{\bullet} - \bullet - \bullet$	$\lvert E_6\rvert = 2^7 3^4 5 = 51840$
E_7	$\bullet - \bullet - \overset{\overset{\bullet}{\mid}}{\bullet} - \bullet - \bullet - \bullet$	$\lvert E_7\rvert = 2^{10} 3^4 5\, 7 = 2\,903\,040$
E_8	$\bullet - \bullet - \overset{\overset{\bullet}{\mid}}{\bullet} - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$	$\lvert E_8\rvert = 2^{14} 3^5 5^2 7 = 696\,729\,600$
F_4	$\bullet - \bullet \overset{4}{-} \bullet - \bullet$	$\lvert F_4\rvert = 2^7 3^2 = 1152$
H_3	$\bullet \overset{5}{-} \bullet - \bullet$	$\lvert H_3\rvert = 2\,3\,5 = 60$
H_4	$\bullet \overset{5}{-} \bullet - \bullet - \bullet$	$\lvert F_4\rvert = 2^6 3^2 5^2 = 14\,400$

Definition 10 (Kristallographische Spiegelungsgruppe)**.** *Eine Spiegelungsgruppe heißt kristallographisch falls* $m_{ij} \in \{2, 3, 4, 6\}$

Definition 11 (Länge einer Spiegelung)**.** *Sei* $w \in W$ *und* $s_i \in S$. *Ein minimales* $l(w)$ *in* $w = s_1 s_2 \dots s_l$ *heißt die Länge einer Spiegelung* w. *Eine minimale Darstellung heißt reduziertes Wort.*

Definition 12 (Coxeterelement)**.** *Ein Coxeterelement ist das Produkt aller einfacher Spiegelungen eines Systems von einfachen Spiegelungen.*

Satz 6. *2 Coxeterelemente* c_1 *und* c_2 *sind immer konjungiert zueinander, d.h.* $\exists w \in W : c_1 = w c_2 w^{-1}$.

Definition 13 (Coxeterzahl und Grade)**.** *Seien* $\lambda_i = e^{\frac{2\pi\imath m_i}{h}}$ *die Eigenwerte eines Coxeterelements. Die Ordnung* h *eines Coxeterelements heißt Coxeterzahl. Die* $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ *heißen Exponenten. Die* $d_i = m_i + 1$ *heißen Grade.*

Definition 14 (Invariantentheorie)**.** *Sei W Spiegelungsgruppe vom Rang n und $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x} = (x_1, x_2 \dots x_n)^T$. Definiere $(w \cdot p)(\boldsymbol{x}) := p(w^{-1}\boldsymbol{x})$.*

Satz 7 (Chevalley)**.** *Sei $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]^W$ die Menge der Polynome die von allen $w \in W$ fixiert werden. $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]^W$ ist endlich erzeugt von n homogenen algebraisch unabhängigen Polynomen mit den Graden $d_1, d_2 \dots d_n$.*

Satz 8. $\sum_{w \in W} t^{l(w)} = \prod_{i=1}^n \frac{1-t^{d_i}}{1-t}$

Korollar 1. $|W| = \prod_{i=1}^n d_i$

2 Nichtkreuzende Partitionen für Spiegelungsgruppen

Im weiteren bezeichnet $T \subset W$ die Menge aller Spiegelungen einer Spiegelungsgruppe W. $S \subset T$ ist eine Menge von einfachen Spiegelungen (abhängig von Φ^+).

Satz 9. $\forall w \in W : \exists w_1 \in W, s \in S : w = w_1 s w_1^{-1}$

Definition 15 (Spiegelungslänge)**.** *Die Spiegelungslänge $l_T(w)$ ist die Länge der kürzesten Darstellung $w = t_1 t_2 \dots t_l$ mit $t_i \in T$.*

Definition 16 (Partielle Ordnung, Spiegelungsordnung, absolute Ordnung)**.** $\pi \leq_T \sigma \Leftrightarrow l_T(\pi) + l_T(\pi^{-1}\sigma) = l_T(\sigma)$

Bemerkung 1. *Dasselbe ginge auch mit S statt T. Die Ordnung $\leq_S$ heißt dann "schwache Ordnung".*

Satz 10 (Carter)**.** *Sei $t_\alpha \in T$ die Spiegelung an der Hyperebene orthogonal zu α. Es gilt: $w = t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \dots t_{\alpha_l}$ reduziert (also eine Darstellung minimaler Länge) $\Longleftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_l$ sind linear unabhängig.*

Bemerkung 2 (Carter)**.** *Längerer Beweis mit Lemmas etc., u.a. $l_T(w) = \#$Eigenwerte$\neq 1$ von W*

Satz 11 (Fixraum, bewegter Raum)**.** *Für $w \in W$ und $Fix(w) = \{v : w(v) = v\}$ gilt:*

1. $Fix(w) = Ker(w - I),\ Mov(w) = Im(w - I)$
2. $V = Fix(w) \oplus Mov(w)$
3. $Fix(w) \perp Mov(w)$

Satz 12. *Seien $\pi, \sigma \in W$. Dann gilt:*

1. $l_T(\pi) = \dim Mov(\pi)$
2. $\pi \leq_T \sigma \Rightarrow Mov(\pi) \subseteq Mov(\sigma)$
3. $\forall t \in T : Mov(t) \subseteq Mov(\pi) \Rightarrow t \leq_T \pi$

Satz 13 (Brady, Watt)**.** *Liegt ein Element $w \in W$ über zwei Elementen $\pi, \sigma \in W$, also $\pi \leq_T w$ und $\sigma \leq_T w$ gilt $\pi \leq_T \sigma \Leftrightarrow Mov(\pi) \subseteq Mov(\sigma)$*

Die maximalen Elemente bzgl. $\leq_T$ sind die Coxeterelemente.

Definition 17 (Non-crossing partitions)**.** *Sei $w \in W$ und c ein Coxeterelement. $NC(W) = \{w \in W : w \leq_T c\}$. Als Poset ist das unabhängig von der Wahl von c weil alle Coxeterelemente konjungiert zueinander sind und $l_T(w)$ unter Konjugation invariant ist.*

Lemma 1 (Verschiebungslemma)**.** *Sei* $w = t_1 t_2 \dots t_l$ *reduziert und* $1 < i < l$*. Dann gilt* $w = t_1 \dots t_{i-1}(t_i t_{i+1} t_i) t_i t_{i+2} \dots t_l = t_1 \dots t_{i-1} t'_{i+1} t_i t_{i+2} \dots t_l$

Korollar 2. $\pi \leq_T \sigma \Leftrightarrow \pi$ *ist ein Teilwort einer reduzierten Darstellung, also* $\sigma = t_1 \dots t_{i_1} \dots t_{i_k}$ *und* $\pi = t_{i_1} \dots t_{i_k}$*.*

Satz 14 (Biane)**.** *Verbindung zur Kombinatorik:*

1. $NC(A_{n-1}) \cong$ *nichtkreuzende Partitionen nach Kreweras auf* $\{1, 2, \dots n\}$*, Zyklen (Spiegelungsgruppen) entsprechen Blöcken (Kreweras).*

2. $NC(B_n) \cong$ *nichtkreuzende Partitionen von* $\{1, 2, \dots n, \overline{1}, \overline{2}, \dots \overline{n}\}$ *die invariant unter* $180°$*-Drehungen bleiben.*

3. $NC(D_n) \cong$ *nichtkreuzende Partitionen von* $\{1, 2, \dots n, \overline{1}, \overline{2}, \dots \overline{n}\}$ *die invariant unter* $180°$*-Drehungen bleiben wo* $1, 2, \dots n-1, \overline{1}, \overline{2}, \dots \overline{n-1}$ *auf einem Kreis aufgetragen sind aber* $n, \overline{n}$ *in der Mitte liegen.*

Bei $NC(B_n)$ benötigt man das Konzept des Nullblocks. Die Partition $\{1\,4\,\overline{1}\,\overline{4}\}\{2\,3\}\{\overline{2}\,\overline{3}\}$ entspricht der Permutation $(1\,4\,\overline{1}\,\overline{4})(2\,3)(\overline{2}\,\overline{3})$ und wird $[1\,4]((2\,3))$ geschrieben. [...] heißt Nullblock. Es gibt maximal einen Nullblock. Für $NC(D_n)$ muß im Falle eines Nullblocks n und $\overline{n}$ enthalten sein.

Satz 15 (Athanasiadis, Reiner (2004))**.** *verallgemeinerte Catalonzahlen für Spiegelungsgruppen:* $C^{(W)} = |NC(W)| = \prod_{i=1}^{n} \frac{h+d_i}{d_i}$

Korollar 3. $C^{(A_n)} = \frac{1}{n+2}\binom{2(n+1)}{n+1}$*;* $C^{(B_n)} = \binom{2n}{n}$*;* $C^{(D_n)} = \frac{3n-2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

2.1 Inzidenzalgebra

Wir betrachten die Inzidenzalgebra $I(P, \mathbb{R})$ des Posets P unter einem Coxeterelement $c = \hat{1}$.

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases} \qquad \zeta(x,y) = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad \mu(x,y) = \zeta^{-1}(x,y)$$

$\#\{\pi_1 \leq \pi_2 \leq \dots \leq \pi_{L-1}\}$ in einem lokal endlichen Poset mit $\hat{0}$ und $\hat{1}$ ist ein Polynom in L, das Zetapolynom.

$$\begin{aligned}
\zeta^L(\hat{0},\hat{1}) &= \sum_{\hat{0} \leq \pi_1 \leq \dots \leq \pi_{L-1} \leq \hat{1}} \zeta(\hat{0},\pi_1)\zeta(\pi_1,\pi_2)\dots\zeta(\pi_{L-1},\hat{1}) = \\
&= \sum_{\hat{0} \leq \pi_1 \leq \dots \leq \pi_{L-1} \leq \hat{1}} 1 = \\
&= \#\,\text{Multiketten } \{\hat{0} \leq \pi_1 \leq \dots \leq \pi_{L-1} \leq \hat{1}\} \\
\zeta^L(\hat{0},\hat{1}) &= (\zeta - \delta + \delta)^L(\hat{0},\hat{1}) = \\
&= \sum_{k=0}^{d} \binom{L}{k} \underbrace{(\zeta-\delta)^k(\hat{0},\hat{1})}_{\#0 < \pi_1 < \dots < \pi_{k-1} < \hat{1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{d} \binom{L}{k} (\#\,\text{Ketten } \{\hat{0} < \pi_1 < \dots < \pi_{k-1} < \hat{1}\}) = \\
&= \text{Polynom in } L \text{ vom Grad } d
\end{aligned}$$

Satz 16 (Multiketten für A_n). *Sei* $L \geq 1$, $s_1, \ldots, s_L \geq 0$, $s_1 + s_2 + \cdots + s_L = n$, $\pi_i \in NC(A_n)$, $rg(\pi_i) = s_1 + \cdots + s_i$ *für* $1 \leq i \leq L$, $b_i = \#$*Blöcke von* π_1 *mit Größe* i. *Es gilt dann*

$$\#\{\pi_1 \leq \pi_2 \leq \cdots \leq \pi_{L-1}\} = \frac{1}{b_1 + \cdots + b_{n+1}} \binom{b_1 + \cdots + b_{n+1}}{b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}} \binom{n+1}{s_2} \cdots \binom{n+1}{s_L}$$

Satz 17 (Multiketten für B_n). *Sei* $L \geq 1$, $s_1, \ldots, s_L \geq 0$, $s_1+s_2+\cdots+s_L = n$, $\pi_i \in NC(B_n)$, $rg(\pi_i) = s_1+\cdots+s_i$ *für* $1 \leq i \leq L$, $2b_i = \#$*Nichtnullblöcke von* π_1 *mit Größe* i. *Es gilt dann*

$$\begin{aligned} \#\{\pi_1 \leq \pi_2 \leq \cdots \leq \pi_{L-1}\} &= \binom{b_1 + \cdots + b_n}{b_1, b_2, \ldots, b_n} \binom{n}{s_2} \cdots \binom{n}{s_L} \\ \textit{mit} \quad & b_1 + 2b_2 + \cdots + nb_n \leq n \end{aligned}$$

Satz 18 (Multiketten für D_n). *Sei* $L \geq 1$, $s_1, \ldots, s_L \geq 0$, $s_1+s_2+\cdots+s_L = n$, $\pi_i \in NC(D_n)$, $rg(\pi_i) = s_1+\cdots+s_i$ *für* $1 \leq i \leq L$, $2b_i = \#$*Nichtnullblöcke von* π_1 *mit Größe* i. *Es gilt dann*

$$\#\{\pi_1 \leq \pi_2 \leq \cdots \leq \pi_{L-1}\} = \begin{cases} \binom{b_1+\cdots+b_n}{b_1,b_2,\ldots,b_n}\binom{n-1}{s_2}\cdots\binom{n-1}{s_L} \\ \qquad\qquad \textit{für } b_1 + 2b_2 + \cdots + nb_n < n-1 \\ \binom{b_1+\cdots+b_n}{b_1,b_2,\ldots,b_n}\binom{n-1}{s_2}\cdots\binom{n-1}{s_L} + \\ + \frac{n-1}{b_1+\cdots+b_n-1}\binom{b_1+\cdots+b_n-1}{b_1,b_2,\ldots,b_n} \cdot \\ \qquad \cdot \sum_{j=2}^{L} \binom{n-1}{s_2}\cdots\binom{n-2}{s_j-2}\cdots\binom{n-1}{s_L} \\ \qquad\qquad \textit{für } b_1 + 2b_2 + \cdots + nb_n = n \end{cases}$$

Satz 19 (Fuß-Catalan-Zahlen). *Sei* $\pi_i \in NC(W)$. *Dann gilt:*
$\#\{\pi_1 \leq \cdots \leq \pi_{L-1}\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(L-1)h+d_i}{d_i}$

3 Nichtverschachtelte Partitionen

Voraussetzung ist ein kristallographisches Wurzelsystem.

Definition 18 (Halbordnung $(\Phi^+, \leq)$).

$$\alpha \leq \beta \iff \beta - \alpha = \sum_{\pi_i \in \Pi(\Phi^+)} c_i \pi_i \ \textit{mit}\ \alpha, \beta \in \Phi^+,\ c_i \geq 0.$$

Definition 19 (Nichtverschachtelte Partition (non-nesting partition)).

$$NN(\Phi) = \{\textit{Antiketten in } (\Phi^+, \leq)\}$$

Satz 20 (Anzahl von nichtverschachtelten Partitionen).

$$|NN(\Phi)| = Cat(\Phi) = \prod_{i=1}^{n} \frac{h + d_i}{d_i}$$

Satz 21 (Athanasiadis, 1998). *Für* $\Phi = A_n, B_n$ *gilt:*

$\#NC(\Phi)$ *mit gegebener Blockstruktur* $= \#NN(\Phi)$ *mit gegebener Blockstruktur*

A Spezielle Spiegelungsgruppen

A.1 Symmetriegruppe $W = A_n = S_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \{e_i - e_j | 1 \leq i \neq j \leq n+1\} \\
H &: (n+1)x_1 + nx_2 + \cdots + 2x_n + x_{n+1} = 0 \text{ (o.B.d.A.)} \\
\Phi^+ &= \{e_i - e_j | 1 \leq i < j \leq n+1\} \\
\Pi(\Phi^+) &= \{e_i - e_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \\
c &= \prod_{w \in \Pi} w = (1\,2)(2\,3)\ldots(n-1\,n) = (1\,2\,\ldots\,n) \qquad \text{Repräsentant} \\
\{c\} &= \{\text{Zyklen der Länge } n\} \\
h &= n \\
d_i &= 2,\, 3, \ldots,\, n+1 \\
|NC(W)| &= \frac{1}{n+2}\binom{2(n+1)}{n+1}
\end{aligned}
$$

A.2 Hyperoktaedergruppe $W = B_n$

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \{e_i \pm e_j | 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm e_i | 1 \leq i \leq n\} \\
H &: nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0 \text{ (o.B.d.A.)} \\
\Phi^+ &= \{e_i \pm e_j | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{+e_i | 1 \leq i \leq n\} \\
\Pi(\Phi^+) &= \{e_i - e_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_n\} \\
c &= \prod_{w \in \Pi} w = (1\,2)\ldots(n-1\,n)(n\,\overline{n}) = (1\,2\,\ldots\,n\,\overline{1}\,\overline{2}\,\ldots\,\overline{n}) \\
|\{c\}| &= 2^{n-1} \text{ (?)} \qquad \text{verifiziert für } n = 1,2,3,4 \\
h &= 2n \\
d_i &= 2,\, 4, \ldots,\, 2n \\
|NC(W)| &= \binom{2n}{n}
\end{aligned}
$$

A.3 Hyperoktaederuntergruppe $W = D_n$

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \{\pm e_i \pm e_j | 1 \leq i \neq j \leq n\} \\
H &: nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0 \text{ (o.B.d.A.)} \\
\Phi^+ &= \{e_i - e_j | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{e_i + e_j | 1 \leq i < j \leq n\} \\
\Pi(\Phi^+) &= \{e_i - e_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_{n-1} + e_n\} \\
c &= \prod_{w \in \Pi} w = (1\,2)\ldots(n-1\,n)(n-1\,\overline{n}) = (1\,2\,\ldots\,n-1\,\overline{1}\,\overline{2}\,\ldots\,\overline{n-1})(n\,\overline{n}) \\
h &= 2n-2 \\
d_i &= 2,\, 4, \ldots,\, 2n-2,\, n \\
|NC(W)| &= \frac{3n-2}{n}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}
$$

A.4 Diedergruppe $I_2(n)$

$$
\begin{aligned}
|S| &= 2 \\
|T| &= n \\
|\{c\}| &= 2 \\
h &= n \\
d_i &= 1,\, 2, \ldots, n \\
|NC(W)| &= n + 2
\end{aligned}
$$