Primzahlsatz

Mischa Kenn

May 3, 2009

Abstract

Zusammenfassung Primzahlsatz Vorlesung Prog. Summerer SS08

1 Der Satz

Satz 1 (Primzahlsatz). *Sei* $\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} | p \leq x\} = \sum_{p \leq x} 1$. *Dann gilt:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Vermutung 1 (Riemannsche Vermutung).

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt + O(\sqrt{x} \log x)$$

2 Schlachtplan

1. Überführen zur ψ-Funktion

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \Longleftrightarrow \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \psi(x) \sim x, \quad x \to \infty$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{von Mangold Funktion}$$

2. Integration der ψ-Funktion

$$\psi(x) \sim x \Longleftrightarrow \psi_1(x) = \int_1^x \psi(t) dt \sim \frac{x^2}{2}$$

3. Integral der ψ-Funktion als komplexes Wegintegral ausdrücken

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds$$

4. Abschätzung des Wegintegrals durch $c \to 1$

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} \to \frac{1}{2}, \quad x \to \infty$$

3 Überführen zur ψ-Funktion

Hilfssatz 1. *Es gilt:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \Longleftrightarrow \psi(x) \sim x, \quad x \to \infty$$

Lemma 1. *Sei $a(n)$ ZTF und $A > 0$. Dann gilt für $x \to \infty$:*

$$\sum_{p \leq x} a(p) \sim Ax \Longleftrightarrow \sum_{p \leq x} \frac{a(p)}{\log p} \sim \frac{Ax}{\log x}$$

Korollar 1. *Setze $a(p) = \log p$. Daraus folgt:*

$$\Theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \sim x \Longleftrightarrow \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \to \infty$$

Lemma 2.

$$\forall x > 0 : 0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\Theta(x)}{x} \leq \frac{\log^2 x}{2 \log 2 \sqrt{x}}$$

Korollar 2.

$$\Theta(x) \sim x \Longleftrightarrow \psi(x) \sim x, \quad x \to \infty$$

4 Integration der ψ-Funktion

Hilfssatz 2.

$$\psi(x) \sim x \Longleftrightarrow \psi_1 = \int_1^x \psi(t)dt \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \to \infty$$

Problem ist, dass ψ nicht differenzierbar ist auf $[1, \infty)$ und deshalb L'Hospital nicht anwendbar.

Lemma 3. *Sei $a(n)$ eine nichtnegative ZTF, $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$, $A_1(x) = \int_1^x A(t)dt$ und $L, c \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:*

$$A_1(x) \sim_{x \to \infty} Lx^c \Longleftrightarrow A(x) \sim_{x \to \infty} cL^{c-1}$$

Korollar 3. *Für $a(n) = \log n$, $L = \frac{1}{2}$ und $c = 2$ folgt Hilfssatz 2.*

5 Integral der ψ-Funktion als komplexes Wegintegral ausdrücken

Hilfssatz 3. *Für $c > 1$ gilt:*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds$$

Lemma 4 (Abelsche Summation)**.** *Sei $a(n)$ eine ZTF, $f(x) \in C^1([x_1, x_2])$ mit $0 < x_1 < x_2$ und $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$. Dann gilt:*

$$\sum_{x_1 < n \leq x_2} a(n)f(n) = A(x_2)f(x_2) - A(x_1)f(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} A(t)f'(t)dt$$

Korollar 4. *Setze* $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $f(n) = x - n$. *Dann gilt:*

$$\sum_{1 \le n \le x} (x-n)a(n) = \int_1^x A(t)dt$$

Korollar 5. *Setze* $a(n) = \Lambda(n)$. *Dann gilt*

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \le x} (1 - \frac{n}{x})\Lambda(n)$$

Nun werden wir $x - n = x\left(1 - \frac{n}{x}\right)$ als Wegintegral deuten.

Lemma 5. *Es seien* $c, u \in \mathbb{R}^+, s = \sigma + it$. *Dann gilt* $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{u^{-s}}{\prod_{l=0}^{k}(s+l)} ds = \begin{cases} \frac{1}{k!}(1-u)^k & \text{für } 0 < u \le 1 \\ 0 & \text{für } u > 1 \end{cases}$$

Korollar 6. *Setze* $k = 1$ *und* $u = \frac{n}{x}$. *Dann gilt für* $c > 1$:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{n}{x} &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)} ds, \quad n \le x \\ 0 &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)} ds, \quad n > x \end{aligned}$$

Korollar 7.

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\Lambda(n)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)} ds$$

Lemma 6 (Absolute Konvergenz um $\sum$ und $\int$ zu vertauschen)**.** *:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\Lambda(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{c+it}}{(c+it)(c+1+it)} \right| dt < \infty$$

Lemma 7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

Korollar 8. *Hilfssatz 3*

6 Abschätzung des Wegintegrals durch $c \to 1$

Hilfssatz 4.

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} \to \frac{1}{2} \text{ für } x \to \infty$$

Korollar 9 (zu Lemma 5)**.** *Setze* $k = 2$ *und* $u = \frac{1}{x}$. *Dann gilt für* $c > 1$:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{(s-1)s(s+1)} ds$$

Lemma 8. *Für* $c > 1$ *und* $x \ge 1$ *gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)ds \\ \text{mit } h(s) &= \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right) \end{aligned}$$

Dabei ist $h(s)$ *analytisch für* $\Re(s) > 0$.

Korollar 10 (Übergang zu reellem Integral)**.** *Für $c > 1$ gilt:*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(c+it)e^{it\log x}dt$$

Die rechte Seite ist für $c > 1$ und $x \to \infty$ unbestimmt weil (o. Bew.) das Integral gegen 0 geht. Darum gilt zu zeigen:

1. Die Gleichung gilt auch für $c = 1$.
2. Das Integral geht auch für $c = 1$ gegen 0 für $x \to \infty$.

6.1 Abschätzung von $|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}|$

Lemma 9 (Eulersche Summenformel)**.** *Sei $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) \in C^1([x_1, x_2])$. Dann gilt:*

$$\sum_{x_1<n\leq x_2} f(n) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2}(t-[t])f'(t)dt + f(x_2)([x_2]-x_2) - f(x_1)([x_1]-x_1)$$

Korollar 11. *$\forall s \in \mathbb{C}$:*

$$\sum_{x_1<n\leq x_2} n^{-s} = -\left(\frac{\{x_2\}}{x_2^s} - \frac{\{x_1\}}{x_1^s}\right) + \frac{x_2^{1-s}}{1-s} - \frac{x_1^{1-s}}{1-s} + s\int_{x_1}^{x_2}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt$$

bzw. für $\Re(s) > 1$ und $\lim x_2 \to \infty$:

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq x_1}\frac{1}{n^s} + \frac{\{x_1\}}{x_1^s} - \frac{x_1^{1-s}}{1-s} + s\int_{x_1}^{\infty}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt$$

Die RS liefert eine meromorphe Fortsetzung von $\zeta(s)$ auf $\{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}$. Wegen $\frac{d}{ds}\int f(s,t)dt = \int \frac{d}{ds}f(s,t)dt$ gilt:

$$\zeta'(s) = -\sum_{n\leq x_1}\frac{\log n}{n^s} - \frac{\{x_1\}\log x_1}{x_1^s} - \frac{x_1^{1-s}}{(1-s)^2} + \frac{x_1^{1-s}\log x_1}{1-s} + \int_{x_1}^{\infty}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt - s\int_{x_1}^{\infty}\frac{\{t\}\log t}{t^{s+1}}dt$$

Lemma 10. *$\forall A \in (0,1) : \exists M_A > 0 : \forall s \in G = \{s = \sigma + it | t \geq e, \sigma \geq 1 - \frac{A}{\log t}\}$:*

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\leq M_A \log t \\ |\zeta'(s)| &\leq M_A \log^2 t \end{aligned}$$

Lemma 11. *$\forall \sigma > 1$:*

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1$$

Korollar 12. *$\forall \sigma \geq 1, t \in \mathbb{R}$:*

$$\zeta(\sigma+it) \neq 0$$

Lemma 12. *$\exists M > 0 : \forall s = \sigma + it : \sigma \geq 1, t \geq e$*

$$|\zeta(s)|^{-1} \leq M\log^7 t$$

Korollar 13. *$\exists N > 0 : \forall s = \sigma + it : \sigma \geq 1, t \geq e$*

$$|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}| \leq N\log^9 t$$

6.2 Übergang von $c \to 1$

Lemma 13. *Es gilt:*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{s-1} h(s) ds$$

und dieses Integral konvergiert absolut.

Lemma 14. *Sei $g \in L^1(\mathbb{R})$ (d.h.$\int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt < \infty$). Dann gilt für $y \in \mathbb{R}$:*

$$\hat{g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-iyt} dt \to 0 \text{ für } |y| \to \infty$$

Korollar 14.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it) e^{it \log x} dt \to 0 \text{ für } x \to \infty$$

Korollar 15. *Hilfssatz 4*