

LU-Algorithmus

KENN Michael, 8725258

6. Juni 2010

Zusammenfassung

Numerische Methoden, Prof. Dvorak SS2010

Kochrezept zum Lösen eines Gleichungssystems mit tridiagonaler Matrix :

Zu lösen ist das Gleichungssystem $Ax = d$, wobei es sich bei A um eine tridiagonale Matrix handelt. Diese Problemstellung tritt bei der Berechnung von Splines auf. Dabei wird $A = LU$ in eine Lower- und eine Upper-Matrix zerlegt.

$$Ax = d \rightarrow LUx = d, \text{ suche } y : Ly = d \rightarrow LUx = Ly \rightarrow Ux = y \rightarrow x$$

Gleichung:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & & 0 \\ & & & & & & & \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

LU-Zerlegung

$$L = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & v_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & v_3 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & v_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iteratives Bestimmen der Matrizen L und U :

$$\begin{array}{lll} & \beta_1 = b_1 & \beta_1 v_2 = c_1 \\ \alpha_2 = a_2 & \alpha_2 v_2 + \beta_2 = b_2 & \beta_2 v_3 = c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} = a_{n-1} & \alpha_{n-1} v_{n-1} + \beta_{n-1} = b_{n-1} & \beta_{n-1} v_n = c_{n-1} \\ \alpha_n = a_n & \alpha_n v_n + \beta_n = b_n & \end{array}$$

Bestimme \vec{y} :

$$\begin{aligned}\underline{y_1}\beta_1 &= d_1 \\ y_1\underline{\alpha_2} + \beta_2\underline{y_2} &= d_2 \\ \dots & \\ y_{n-1}\alpha_n + \beta_n\underline{y_n} &= d_n\end{aligned}$$

Bestimme \vec{x} :

$$\begin{aligned}\underline{x_n} &= y_n \\ \underline{x_{n-1}} + v_n x_n &= y_{n-1} \\ \dots & \\ \underline{x_1} + v_2 x_2 &= y_1\end{aligned}$$

Anwendung für Splines siehe Ausdruck Vorlesung.