Numerische Methoden
Programmierbeispiel 1
Der Simplex und das ZE3KP

KENN Michael, 8725258

11. April 2010

Zusammenfassung

Zusammenfassung einiger theoretischer Überlegungen zum ZE3KP

Das zu minimierende Potential lautet

$$U(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1-\mu}{\sqrt{((x+\mu)^2+y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{((x+\mu-1)^2+y^2}}$$

wobei $\mu \in]0, \frac{1}{2}]$ eine aus dem Massenverhältnis der beiden Hauptkörper errechnet Konstante ist. Auf der Achse $y = 0$ gibt es je ein Minima in den Intervallen $]-\infty, -\mu[$, $]-\mu, -\mu+1[$ und $]-\mu+1, \infty[$. Für $y \neq 0$ gibt es 2 zur x-Achse symmetrische Minima. Abbildung (1) verdeutlicht das.

Berechnung von L_4 und L_5 $(y \neq 0)$:
Ich nehme o.B.d.A $y > 0$ an. Nullsetzen der beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ liefert den Punkt $L_4 = (\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Die Hessematrix an der Stelle L_4 lautet

$$H(L_4) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{pmatrix} (L_4) = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}(1-2\mu) \\ \sqrt{3}(1-2\mu) & 3 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist für $\mu \in]0, \frac{1}{2}]$ positiv definit und es liegt deshalb tatsächlich ein Minimum vor.

Berechnung von L_1, L_2, L_3 $(y = 0)$:
Die Potentialfunktion vereinfacht sich hier zu

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1-\mu}{x+\mu} - \frac{\mu}{x+\mu-1} & x < -\mu \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1-\mu}{x+\mu} - \frac{\mu}{x+\mu-1} & x \in]-\mu, -\mu+1[\\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1-\mu}{x+\mu} + \frac{\mu}{x+\mu-1} & x > -\mu+1 \end{cases}$$

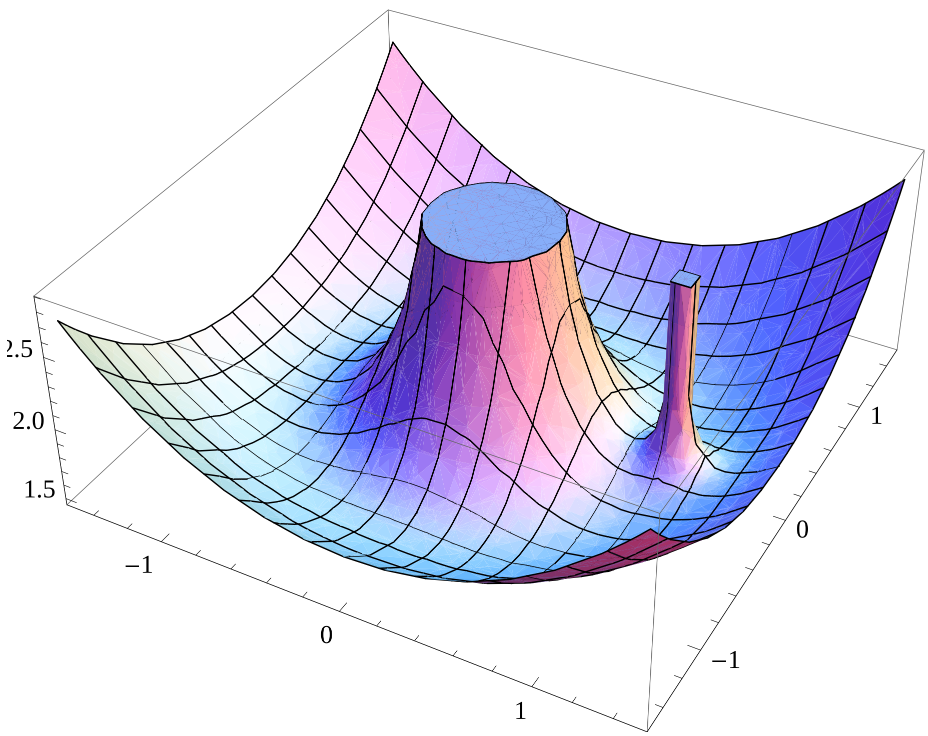

Abbildung 1: Potentialfunktion für $\mu = \frac{1}{27}$

Der Fall $L_3(x < -\mu)$:
Gesucht ist die Lösung $x(\mu)$ von

$$F(\mu, x(\mu)) \quad = \quad \frac{dU(x)}{dx} = 0$$

Ich will die Lösung um die Stelle $\mu = 0$ entwickeln:

$$x(\mu) \quad = \quad x(0) + x'(0)\mu + \frac{x''(0)}{2}\mu^2 + \frac{x'''(0)}{6}\mu^3 + \ldots$$

Implizites Differenzieren liefert

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot x'(\mu) \quad = \quad 0$$

und weiters

$$\begin{aligned} x'(\mu) &= -\frac{F_\mu}{F_x} \\ x''(\mu) &= \frac{(F_{\mu x} + F_{xx}x')F_m - (F_{\mu\mu} + F_{\mu x}x')F_x}{F_x^2} \\ X'''(\mu) &= \text{kompliziert, siehe Mathematica} \end{aligned}$$

Die Lösung $x(\mu = 0) = -1$ ist leicht zu sehen und durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} x'(0) &= -\frac{5}{12} \\ x''(0) &= 0 \\ x'''(0) &= \frac{1127}{3456} \end{aligned}$$

Damit

$$x(\mu) \quad \approx \quad x_3(\mu) = -1 - \frac{5}{12}\mu + \frac{1127}{20736}\mu^3$$

Weitere Ableitungen sind aufwendig zu berechnen. Ich habe deshalb an dieser Stelle noch eine Iteration Newton'sches Näherungsverfahren angehängt und danach in eine Potenzreihe entwickelt:

$$x(\mu) \quad = \quad x_3(\mu) - \frac{F(x_3(\mu))}{F_x(x_3(\mu))}$$

$$x(\mu) \quad = \quad = -1 - \frac{5}{12}\mu + \frac{1127}{20736}\mu^3 + \frac{7889}{248832}\mu^4 + \frac{261023}{11943936}\mu^5 + \ldots$$

Für $\mu = \frac{1}{27}$ ist der Fehler 10^{-10}, für $\mu = \frac{1}{2}$ allerdings doch noch 10^{-3}.

Der Fall $L_1(-\mu < x < -\mu + 1)$:
Hier hat $x(\mu)$ an der Stelle $\mu = 0$ eine Singularität und es kann deshalb nicht um $\mu = 0$ entwickelt werden. Eine Alternative ist die Entwicklung um $\mu = \frac{1}{2}$ mit $x(\frac{1}{2}) = 0$. Analog dem ersten Fall erhält man

$$x(\mu) \quad = \quad = -\frac{24}{17}(\mu - \frac{1}{2}) - \frac{36064}{83521}(\mu - \frac{1}{2})^3 + \ldots$$

Der Fall $L_2(-\mu + 1 < x)$:
Auch hier hat $x(\mu)$ an der Stelle $\mu = 0$ eine Singularität. Auf weitere Untersuchungen habe ich hier verzichtet. Im Programm ist das Newton'sche Näherungsverfahren implementiert.

Simplex Parameter :
Es wurden folgende Parameter für die Simplex-Methode gewählt:

$$\begin{aligned} a &= 1.0 \\ b &= 0.5 \\ c &= 2.0 \\ d &= 0.5 \\ P_1 &= (0.0/1.0) \\ P_2 &= (1.0/1.0) \\ P_3 &= (0.5/0.0) \end{aligned}$$

Results :
Gefragt waren die Lagrangepunkte für $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{27}$ und $\mu = \frac{1}{100}$, die in folgender Tabelle zusammengefasst sind:

	$\mu = \frac{1}{2}$	$\mu = \frac{1}{27}$	$\mu = \frac{1}{100}$
L_1	(0.000/ 0.000)	(0.749/ 0.000)	(0.848/ 0.000)
L_2	(1.198/ 0.000)	(1.212/ 0.000)	(1.147/ 0.000)
L_3	(-1.198/ 0.000)	(-1.015/ 0.000)	(-1.004/ 0.000)
L_4	(0.000/ 0.866)	(0.463/ 0.866)	(0.490/ 0.866)
L_5	(0.000/-0.866)	(0.463/-0.866)	(0.490/-0.866)