Numerische Methoden der Astronomie
Beispiel 34

Kenn Michael (8725258)

9. Juni 2010

Definition 1 (Legendre-Polynome) *Die Polynome $P_n(x)$ definiert durch die Rekursion*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_{n-1}(x) &= xP_n(x) - \frac{x^2-1}{n}\frac{d}{dx}P_n(x) \end{aligned}$$

heißen Legendre-Polynome.

Satz 1 *Das n-te Legendre-Polynom $P_n(x)$ ist gegeben durch*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Satz 2 (Orthogonalität) *Die Legendre-Polynome sind orthogonal bezüglich des Skalar Produkts*

$$\langle P_m | P_n \rangle = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx$$

Für den Beweis definieren wir zunächst

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= (x^2-1)^n \\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}Q_n(x) = \frac{1}{2^n n!}Q_n^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Eine wesentlich stärker Aussage als die Orthogonalität selbst ist folgendes Lemma:

Lemma 1 *$\forall n,\ l < k,\ k = 1, 2, \ldots n$:*

$$\langle x^l | Q_n^{(k)}(x) \rangle = 0$$

Beweis per Induktion über k:

$$\begin{aligned} & k = 1 \rightarrow l = 0 \\ & \langle 1 | Q'_n(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{dQ_n(x)}{dx} dx = 0 \end{aligned}$$

$k - 1 \rightarrow k$ mit $l < k$

$$\langle x^l | Q_n^{(k)}(x) \rangle = \underbrace{\left[x^l Q_n^{(k-1)}(x) \right]_{-1}^{1}}_{Q_n(x) \text{ hat } n-\text{fache } 0-\text{Stelle bei } \pm 1} - \underbrace{\int_{-1}^{1} x^{l-1} Q_n^{(k-1)}(x) dx}_{\text{wegen Induktionsvoraussetzung}=0} = 0$$