Numerische Methoden der Astronomie
Beispiel 32
Kenn Michael (8725258)
6. Juni 2010

Kochrezept :
Gegeben sein ein Differentialgleichungssystem mit Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= \vartheta_i(z_1, \ldots, z_k, t) \\ z_i(0) &= \zeta_i \end{aligned}$$

Der Lie-Operator D ist definiert als

$$D = \vartheta_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_k, t)\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \cdots + \vartheta_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_k, t)\frac{\partial}{\partial \zeta_k}$$

Es gilt dann

$$z_i(t) = e^{tD}\zeta_i = \zeta_i + tD\zeta_i + \frac{t^2}{2}D^2\zeta_i + \ldots$$

Beispiel :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -g + q\dot{r}^2 \\ r_0 &= h \\ \dot{r}_0 &= v_0 = 0 \end{aligned}$$

Ansatz: $z_1 \leftrightarrow \dot{r}$

$z_1(t) = \dot{r}$ $\qquad$ $\dot{z}_1(t) = -g + qz_1^2(t)$ $\qquad$ $\vartheta_1 = -g + q\zeta_1^2$

Lie-Operator:

$$D = \sum \vartheta_i(\vec{\zeta})\frac{\partial}{\partial \zeta_i} = (-g + q\zeta_1^2)\frac{\partial}{\partial \zeta_1}$$

Berechnung der Lie-Terme:

$$\begin{aligned} D\,\zeta_1 &= -g + q\zeta_1^2 \\ D^2\zeta_1 &= 2q\zeta_1(-g + q\zeta_1^2) = \\ &= -2gq\zeta_1 + 2q^2\zeta_1^3 \\ D^3\zeta_1 &= -2gq(-g + q\zeta_1^2) + 6q^2(-g + q\zeta_1^2)\zeta_1^2 = \\ &= 2g^2q - 8gq^2\zeta_1^2 + 6q^2\zeta_1^4 \\ D^4\zeta_1 &= -16gq^2(-g + q\zeta_1^2)\zeta_1 + 24q^3(-g + q\zeta_1^2)\zeta_1^3 = \\ &= 16g^2q^2\zeta_1 - 40gq^3\zeta_1^3 + 24q^4\zeta_1^5 \\ D^5\zeta_1 &= -16g^3q^2 + 136g^2q^3\zeta_1^2 - 240gq^4\zeta_1^4 + 120q^5\zeta_1^6 \\ D^6\zeta_1 &= -272g^3q^3\zeta_1 + 1232g^2q^4\zeta_1^3 - 1680gq^5\zeta_1^5 + 720q^6\zeta_1^7 \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
\dot{r}(t) &= -gt + 2g^2 q t^3 - 16 g^3 q^2 t^5 + \ldots \\
r(t) &= h - \frac{g}{2} t^2 + \frac{g^2 q}{2} t^4 - \frac{8 g^3 q^2}{3} t^6 + \ldots
\end{aligned}
$$