Numerische Methoden der Astronomie
Beispiel 21

Kenn Michael (8725258)

30. April 2010

Kochrezept :
Gegeben sein ein Differentialgleichungssystem mit Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= \vartheta_i(z_1, \ldots, z_k, t) \\ z_i(0) &= \zeta_i \end{aligned}$$

Der Lie-Operator D ist definiert als

$$D = \vartheta_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_k, t)\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \cdots + \vartheta_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_k, t)\frac{\partial}{\partial \zeta_k}$$

Es gilt dann

$$z_i(t) = e^{tD}\zeta_i = \zeta_i + tD\zeta_i + \frac{t^2}{2}D^2\zeta_i + \ldots$$

Beispiel :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - 8xy \\ \ddot{y} &= -y - x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Ansatz: $z_1 \leftrightarrow x, z_2 \leftrightarrow \dot{x}, z_3 \leftrightarrow y, z_4 \leftrightarrow \dot{y}$

$$\begin{array}{lrr} z_1(t) = x & \dot{z}_1(t) = z_2(t) & \vartheta_1 = \zeta_2 \\ z_2(t) = \dot{x} & \dot{z}_2(t) = -z_1(t) - 8z_1(t)z_3(t) & \vartheta_2 = -\zeta_1 - 8\zeta_1\zeta_3 \\ z_3(t) = y & \dot{z}_3(t) = z_4(t) & \vartheta_3 = \zeta_4 \\ z_4(t) = \dot{y} & \dot{z}_4(t) = -z_1^2(t) - z_3(t) - z_3^2(t) & \vartheta_4 = -\zeta_1^2 - \zeta_3 + \zeta_3^2 \end{array}$$

Lie-Operator:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{4}\vartheta_i(\vec{\zeta})\frac{\partial}{\partial \zeta_i} = \\ &\zeta_2\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + (-\zeta_1 - 8\zeta_1\zeta_3)\frac{\partial}{\partial \zeta_2} + \zeta_4\frac{\partial}{\partial \zeta_3} + (-\zeta_1^2 - \zeta_3 + \zeta_3^2)\frac{\partial}{\partial \zeta_4} \end{aligned}$$

Berechnung der Lie-Terme:

$$\begin{aligned} D\,\zeta_1 &= \zeta_2 \\ D^2\zeta_1 &= D\zeta_2 = -\zeta_1 - 8\zeta_1\zeta_3 \\ D^3\zeta_1 &= -D\zeta_1 - 8\zeta_3 D\zeta_1 - 8\zeta_1 D\zeta_3 = -\zeta_2 - 8\zeta_1\zeta_4 - 8\zeta_2\zeta_3 \\ D\,\zeta_3 &= \zeta_4 \\ D^2\zeta_3 &= D\zeta_4 = -\zeta_1^2 - \zeta_3 + \zeta_3^2 \\ D^3\zeta_3 &= -2\zeta_1 D\zeta_1 - D\zeta_3 + 2\zeta_3 D\zeta_3 = -\zeta_4 - 2\zeta_1\zeta_2 + 2\zeta_3\zeta_4 \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} x(t) &= \zeta_1 + \zeta_2 t - (\zeta_1 + 8\zeta_1\zeta_3)\frac{t^2}{2} - (\zeta_2 + 8\zeta_1\zeta_4 + 8\zeta_2\zeta_3)\frac{t^3}{3} + \ldots \\ y(t) &= \zeta_3 + \zeta_4 t - (\zeta_1^2\zeta_3 - \zeta_3^2)\frac{t^2}{2} - (\zeta_4 + 2\zeta_1\zeta_2 - 2\zeta_3\zeta_4)\frac{t^3}{3} + \ldots \end{aligned}$$