Numerische Methoden der Astronomie
Beispiel 20

Kenn Michael (8725258)

30. April 2010

Kochrezept :
Gegeben sein ein Differentialgleichungssystem mit Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= \vartheta_i(z_1, \dots, z_k, t) \\ z_i(0) &= \zeta_i \end{aligned}$$

Der Lie-Operator D ist definiert als

$$D = \vartheta_1(\zeta_1, \dots, \zeta_k, t)\frac{\partial}{\partial\zeta_1} + \dots + \vartheta_k(\zeta_1, \dots, \zeta_k, t)\frac{\partial}{\partial\zeta_k}$$

Es gilt dann

$$z_i(t) = e^{tD}\zeta_i = \zeta_i + tD\zeta_i + \frac{t^2}{2}D^2\zeta_i + \dots$$

Beispiel :

$$\ddot{\phi} = \sin\phi$$

Ansatz: $z_1 \leftrightarrow \phi, z_2 \leftrightarrow \dot{\phi}$

$$\begin{array}{lll} z_1(t) = \phi(t) = e^{tD}\zeta & \dot{z}_1(t) = z_2(t) & \vartheta_1(\zeta, \eta) = \eta \\ z_2(t) = \dot{\phi}(t) = e^{tD}\eta & \dot{z}_2(t) = \sin z_1(t) & \vartheta_2(\zeta, \eta) = \sin\zeta \end{array}$$

Lie-Operator:

$$D = \vartheta_1(\zeta, \eta)\frac{\partial}{\partial\zeta} + \vartheta_2(\zeta, \eta)\frac{\partial}{\partial\eta} = \eta\frac{\partial}{\partial\zeta} + \sin\zeta\frac{\partial}{\partial\eta}$$

Berechnung der Lie-Terme:

$$\begin{aligned} D\zeta &= \eta \\ D^2\zeta &= D\eta = sin\zeta \\ D^3\zeta &= \eta\cos\zeta \\ D^4\zeta &= D\eta\cos\zeta + \eta D\cos\zeta = \sin\zeta\cos\zeta - \eta^2\sin\zeta \\ D^5\zeta &= \eta\cos^2\zeta - 3\eta\sin^2\zeta - \eta^3\cos\zeta \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \zeta + \eta t + \sin\zeta\frac{t^2}{2} + \eta\cos\zeta\frac{t^3}{6} + \\ &\quad + (\sin\zeta\cos\zeta - \eta^2\sin\zeta)\frac{t^4}{24} + (\eta\cos^2\zeta - 3\eta\sin^2\zeta - \eta^3\cos\zeta)\frac{t^5}{120} + \dots \end{aligned}$$