Numerische Methoden der Astronomie
Beispiel 18
Kenn Michael (8725258)
1. Mai 2010

Kochrezept :
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(y(x), x) \\ y(x_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y(x_0+h) - y(x_0) &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = h\frac{\frac{\nabla}{1-\nabla}}{\log(1-\nabla)} = \\ &= h \cdot (f(x_0) + \frac{1}{2}\nabla f(x_0) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(x_0) + \frac{3}{8}\nabla^3 f(x_0) + \frac{251}{720}\nabla^4 f(x_0) + \dots) \end{aligned}$$

Beispiel :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{6+x} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

mit (analytischer) Lösung

$$y(x) = \frac{6}{6+x}$$

Die Anlaufstelle ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x_0 = 0) &= -\frac{-y_0}{6+x_0} = -\frac{1}{6} \\ \frac{d^2y}{dx^2}(x_0 = 0) &= -\frac{\frac{dy}{dx}(x_0)(6+x_0) - y_0}{(6+x_0)^2} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Einsetzen in Taylorentwicklung um die Stelle $x_0 = 0$ liefert

$$y(h) = 1 - \frac{1}{6}h + \frac{1}{36}h^2$$

Laut Angabe ist $h = 0.1$ zu wählen. Mit den Werten $y(-2h)$, $y(-h)$ und $y(0)$ geht man dann in den Algorithmus. Die Berechnung erfolgte mit Excel. Der maximale Fehler bis $y(4h)$ liegt bei unter 10^{-6}.