Numerische Methoden der Astronomie
Beispiel 13
Kenn Michael (8725258)
9. April 2010

Sterling'sches Interpolationsverfahren :

$$\begin{aligned} f(t) &= f(a+sh) = f(a) + sf^{I}(a) + \frac{s^2}{2!} f^{II}(a) + \frac{(s+1)s(s-1)}{3!} f^{III}(a) + \\ &+ \frac{(s+1)s^2(s-1)}{4!} f^{IV}(a) + \frac{(s+2)(s+1)s(s-1)(s-2)}{5!} f^{V}(a) + \dots \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f^{2X+1}(a) &= \frac{f^{2X}(a+h) - f^{2X}(a-h)}{2} = \\ &= \frac{f^{2X+1}(a+\frac{1}{2}h) + f^{2X+1}(a-\frac{1}{2}h)}{2} \end{aligned}$$

Beweis induktiv. Ferner gilt wegen $t = a + sh$

$$\frac{d^n f}{ds^n} = h^n \frac{d^n f}{dt^n} = h^n f^{(n)}(t)$$

Aus Ableitung nach s folgt

$$\begin{aligned} h\,f'(t) &= f^{I}(a) + sf^{II}(a) + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{6}\right) f^{III}(a) + \\ &+ \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{12}\right) f^{IV}(a) + \left(\frac{s^4}{24} - \frac{s^2}{8} + \frac{1}{30}\right) f^{V}(a) + \\ &+ \left(\frac{s^5}{120} - \frac{s^3}{36} + \frac{s}{90}\right) f^{VI}(a) + \left(\frac{s^6}{720} - \frac{s^4}{72} + \frac{7s^2}{240} - \frac{1}{140}\right) f^{VII}(a) + \dots \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$p_n(s) = \frac{(s-n)(s-n+1)\dots(s+1)s(s-1)\dots(s+n-1)(s+n)}{(2n+1)!}$$

so folgt nach kurzer Rechnung

$$p'_{n+1}(0) = -\frac{n+1}{2(2n+3)}\, p'_n(0)$$

bzw.

$$p'_n(0) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

und damit für $s = 0$

$$\begin{aligned} h\,f'(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} f^{(2n+1)I}(a) = \\ &= f^{I}(a) - \frac{1}{6} f^{III}(a) + \frac{1}{30} f^{V}(a) - \frac{1}{140} f^{VII}(a) + \ldots \end{aligned}$$

Analog läßt sich berechnen

$$p_n''(0) = \frac{(-1)^n}{\binom{2n+2}{2}\binom{2n}{n}}$$

und damit wieder für $s = 0$

$$\begin{aligned} h^2\,f''(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{2n+2}{2}\binom{2n}{n}} f^{(2n+2)I}(a) = \\ &= f^{II}(a) - \frac{1}{12} f^{IV}(a) + \frac{1}{90} f^{VI}(a) - \frac{1}{560} f^{VIII}(a) + \ldots \end{aligned}$$

Setzt man fort so folgt

$$\begin{aligned} h^3\,f^{(3)}(a) &= f^{III}(a) - \frac{1}{4} f^{V}(a) + \frac{7}{120} f^{VII}(a) - \ldots \\ h^4\,f^{(4)}(a) &= f^{IV}(a) - \frac{1}{6} f^{VI}(a) + \ldots \\ h^5\,f^{(5)}(a) &= f^{V}(a) - \frac{1}{3} f^{VII}(a) + \ldots \\ h^6\,f^{(6)}(a) &= f^{VI}(a) - \ldots \end{aligned}$$

Umkehrung geht durch direktes Einsetzen

$$\begin{aligned} f^{I}(a) &= h\,f'(a) + \frac{1}{6} f^{III}(a) - \frac{1}{30} f^{V}(a) + \frac{1}{140} f^{VII}(a) - \ldots \\ f^{II}(a) &= h^2\,f''(a) + \frac{1}{12} f^{IV}(a) - \frac{1}{90} f^{VI}(a) + \frac{1}{560} f^{VIII}(a) - \ldots \\ f^{III}(a) &= h^3\,f^{(3)}(a) + \frac{1}{4} f^{V}(a) - \frac{7}{120} f^{VII}(a) + \ldots \\ f^{IV}(a) &= h^4\,f^{(4)}(a) + \frac{1}{6} f^{VI}(a) - \ldots \\ f^{V}(a) &= h^5\,f^{(5)}(a) + \frac{1}{3} f^{VII}(a) - \ldots \\ f^{VI}(a) &= h^6\,f^{(6)}(a) + \ldots \end{aligned}$$

Schrittweises Substituieren liefert das gesuchte Ergebnis

$$
\begin{aligned}
f^{I}(a) &= h\,f'(a) + \frac{1}{6}h^3\,f^{(3)}(a) + \frac{1}{120}h^5\,f^{(5)}(a) + \ldots \\
f^{II}(a) &= h^2\,f''(a) + \frac{1}{12}h^4\,f^{(4)}(a) + \frac{1}{360}h^6\,f^{(6)}(a) + \ldots \\
f^{III}(a) &= h^3\,f^{(3)}(a) + \frac{1}{4}h^5\,f^{(5)}(a) + \ldots \\
f^{IV}(a) &= h^4\,f^{(4)}(a) + \frac{1}{6}h^6\,f^{(6)}(a) + \ldots \\
f^{V}(a) &= h^5\,f^{(5)}(a) + \ldots \\
f^{VI}(a) &= h^6\,f^{(6)}(a) + \ldots
\end{aligned}
$$