

Himmlisches Ballett

Periodische Lösungen des n -Körper-Problems sind weitaus vielgestaltiger, als man bisher vermutete.

Von Christoph Pöppe

Es gibt eine Insel der Regelmäßigkeit im großen Chaos der Himmelsmechanik. Unter ganz besonderen Umständen vollführen drei Planeten (korrekter: Massenpunkte), die einander nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen, nicht irgendwelche wilden Bewegungen, sondern eine, die sich wie ein Uhrwerk immer wieder periodisch wiederholt. Mehr noch: Die drei Körper durchlaufen – mit gehörigem zeitlichem Abstand – sämtlich dieselbe Bahn, und die liegt auch noch in der Ebene und hat die Form einer Acht, mit einem Kreuzungspunkt in der Mitte. Im November 2000 habe ich in dieser Zeitschrift die damals neue Entdeckung von Richard Montgomery und Alain Chenciner beschrieben (»Stabile Dreierbeziehung: die himmlische Achterbahn«, S. 15).

Der Fund war spektakulär, denn bis dahin konnte man die nichtchaotischen Lösungen des Dreikörperproblems (und allgemeiner des n -Körper-Problems) an einer Hand abzählen. Als bald versuchten die Mathematiker, aus den Ideen von Montgomery und Chenciner noch wei-

tere Lösungen herauszuholen. Und sie waren höchst erfolgreich!

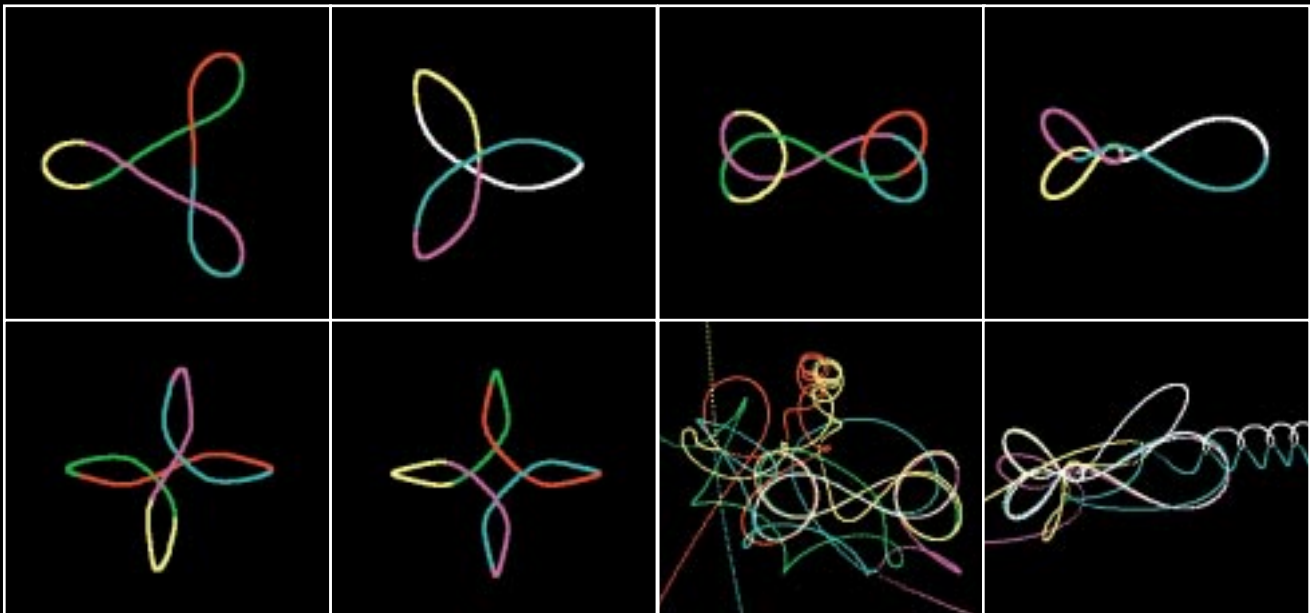
Die erste Überraschung war: Die Achterlösung war gar nicht so neu. Christopher Moore, heute an der Universität von New Mexico in Albuquerque, hatte sie bereits 1993 entdeckt und beschrieben. Entscheidende Fortschritte brachten allerdings die numerischen Verfahren von Carles Simó von der Universität Barcelona. Er fand zahlreiche Anordnungen von drei oder mehr Körpern, die einander auf derselben Bahn hinterherlaufen; im Allgemeinen haben diese Bahnen nicht nur einen Kreuzungspunkt wie die Acht, sondern viele (Bild), liegen aber entgegen dem Anschein nach wie vor in einer Ebene.

Offensichtlich kommt es entscheidend auf das Timing an. Beim Überqueren eines Kreuzungspunkts muss jeder Körper eine Lücke im Querverkehr abpassen, und zwar so, dass er von den Kollegen beiderseits der Lücke möglichst gleichen Abstand hält. Sonst würde die Anziehungskraft des näheren überwiegen und ihn aus der Bahn werfen. Simó nennt dieses genau abgestimmte Bewegungsmuster eine »Choreografie«.

Mit dem Gravitationsgesetz ist nicht zu spaßen. Da die Anziehungskraft dem Quadrat des Abstands umgekehrt proportional ist, wird sie bei nahen Begegnungen sehr groß. Anders ausgedrückt: Sowie zwei Körper einander sehr nahe kommen, setzen sie eine unbeschränkte Menge an potenzieller Energie in kinetische um. Eine geringe Störung durch einen dritten Körper genügt dann, um beide auf Nimmerwiedersehen in den Weiten des Alls verschwinden zu lassen.

Man sucht aber Lösungen, bei denen genau das nicht passiert. Und die findet man mit dem »Prinzip der kleinsten Wirkung«: Man gibt sich die Positionen der n Körper für einen Anfangs- und einen Endzeitpunkt vor. Unter allen Bewegungen, welche die Körper vom einen in den anderen Ort überführen, gehorcht diejenige, die eine – eigens definierte – Größe namens »Wirkung« minimiert, dem Gravitationsgesetz. Numeriker wie Simó ändern daher eine probeweise angesetzte Bewegung per Computerprogramm so ab, dass deren Wirkung geringer wird. Die abgeänderte Bewegung kommt einer physikalisch korrekten schon etwas näher, wird nochmals abgeändert, und so weiter. Da die Wirkung bei Kollisionen oder gefährlich dichten Begegnungen sehr groß wird, neigt ein solches Minimierungsverfahren dazu, diesen Zuständen aus dem Wege zu gehen.

Merkwürdigerweise ist die Gravitationskraft für die Zwecke des Minimierungsverfahrens sogar ein bisschen zu



ALLE ABILDUNGEN: ROBERT JENKINS (HTTP://BURLLEURLLE.NET/BOB/PHYS/ICS/)

schwach. In der Nähe von Kollisionszuständen steigt die Wirkung nicht dramatisch genug an, um das Verfahren unter allen Umständen von solchen Zuständen abzuschrecken. Das funktioniert erst in einer fiktiven Welt, in der die Gravitationskraft zum Beispiel der dritten statt der zweiten Potenz des Abstands umgekehrt proportional ist. Allerdings nimmt auch bei der Newton'schen Gravitation das Minimierungsverfahren keinen Zusammenstoß in Kauf, nicht einmal vorübergehend; aber das ist nur mit zusätzlichen Argumenten beweisbar.

Jedenfalls kann das Minimierungsverfahren die Reihenfolge, in der zwei Körper eine Kreuzung überqueren, nicht ändern, denn der Übergang von der einen zur anderen Reihenfolge besteht aus einem Kollisionskurs. Gibt man also dem Algorithmus als Startvorgabe eine irgendwie verknotete Bahn, dann bleibt sie verknotet, wenn das Verfahren zum Ziel führt. Und das gelingt, wie die Bilder zeigen, in vielen Fällen.

Die Bahnen der beteiligten Körper müssen auch nicht in einer Ebene liegen. In einem dreidimensionalen Koordinatensystem stehen die (x, y) -, die (x, z) - und die (y, z) -Ebene paarweise senkrecht aufeinander und haben alle drei den Nullpunkt gemeinsam. Man lasse in jeder dieser Ebenen einen Massenpunkt im Abstand 1 um den Nullpunkt kreisen, und zwar so, dass sich die drei Massen an den sechs Kreuzungspunkten der Kreise so weit wie möglich aus dem Weg gehen.

Damit daraus eine Lösung des Dreikörperproblems wird, müssen die Kreise noch etwas verbeult werden. Jeder Körper muss von der Ebene seiner Kreisbahn stellenweise nach links oder rechts abweichen, um die Anziehungskräfte seiner Kollegen, die im Allgemeinen nicht symmetrisch zu dieser Ebene stehen, zu kompensieren. Auf einer solchen deformierten Kreisbahn finden sogar Paare einander gegenüberstehender Körper oder größere Anzahlen gleichzeitig Platz, ohne den Kollegen auf den anderen Kreisbahnen in die Quere zu kommen.

Cristopher Moore hat außer diesen Dreifachringen noch weitere Anordnungen mit mehr als drei ineinander hängenden Bahnen gefunden.

Ist es denkbar, dass vielleicht irgendwo in einer fernen Galaxie ein echtes Planeten- oder Mehrfachsternsystem sich in so merkwürdigen Bahnen bewegt? Eher nicht. Die Existenz einer periodischen Lösung ist eine Sache, ihre Stabilität eine andere. Die meisten der von Simó gefundenen Bahnen halten selbst kleinen Störungen nur kurze Zeit stand. Außerdem drohen ausgedehnte Körper im Gegensatz zu Massenpunkten unter dem Angriff räumlich variierender Gravitationskräfte zu zerreißen. Nur die Acht, mit der alles anfang, scheint äußerst stabil zu sein.

Vieles zur Stabilität hat Robert Jenkins, im Hauptberuf Angestellter des Softwareherstellers Oracle, durch Probie- ren herausgefunden. Er schrieb extrem

▲ **Himmliche Choreografien von Carles Simó: Drei bis fünf Massenpunkte durchlaufen hintereinander dieselbe Bahn. Die Farben kennzeichnen den Weg der »Himmelskörper« von einem willkürlichen Anfangspunkt aus, bis jeder den Startplatz seines Vorgängers eingenommen hat. Die beiden rechten Bilder unten zeigen leicht gestörte Versionen der darüberstehenden Bahnen.**

genaue Algorithmen für die Lösung des Anfangswertproblems: Verfolge, wie sich eine gewisse Anfangskonfiguration entwickelt. So kann er – neben vielen anderen Bahnen – für jede von Simós Lösungen vorführen, wie sie durch die unvermeidlichen Fehler der numerischen Näherung auseinander fliegt. Zwei Beispiele finden Sie rechts unten im Bild. ◁



Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

Braids in classical gravity. Von Cristopher Moore in: Physical Review Letters, Bd. 70, S. 3675, 1993

Action minimizing solutions of the Newtonian n -body problem: from homology to symmetry. Von Alain Chenciner. Online unter www.bdl.fr/Equipes/ASD/preprints/prep.2002/ICM2002.pdf

Weitere Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.

AUTOR UND LITERATURHINWEISE