

Das N -Körperproblem

Michael Kenn

25. Oktober 2010

Zusammenfassung

Bachelorarbeit im Rahmen der Lehrveranstaltung "280193 (Gruppe 1) SE Astronomisches Bachelorseminar (inklusive Bachelorarbeit) (PI)". Diese Arbeit handelt von Lösungen des N -Körperproblems ohne oder mit geringer Zentralmasse. Die Integration erfolgt hierbei mit Lie-Reihen. Es werden Möglichkeiten der Korrektur von Trajektorien mit Hilfe Konservierung von Erhaltungsgrößen durch Projektionen erörtert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Bewegungsgleichung im \mathbb{R}^3	4
3	Das N-Körperproblem	5
4	Hamilton Energie	6
5	Drehimpulserhaltung	6
6	Lösen von Differentialgleichungen nach Lie	7
7	N-Körper Problem und Lie	8
8	Konservierung von Erhaltungsgrößen durch Projektion	8
9	Projektion für das N-Körperproblem	9

10 N-Körper Problem ohne Zentralmasse	11
11 N-Körper Problem mit geringer Zentralmasse	14
12 Nochmals Projektion	16
A Elliptizität	17
B Zufallsorbits auf der Einheitskugel	18
C Normalverteilte Zufallsgrößen	18
D Technische Details	19
E Mathematica Animationen	19

Vorwort

Aufgabenstellung dieser Bachelorarbeit ist es, das N -Körperproblem mit Lie-Integration zu implementieren. Dabei soll speziell auf den in der Regel instabilen Fall ohne großer Zentralmasse eingegangen werden. Frage ist es, ob der Zeitpunkt des gewöhnlich früher oder später eintretenden chaotischen Verhaltens schon durch die Datenungenauigkeiten in der Anfangsdaten bestimmt ist oder durch verfeinerte Simulationsmethoden hinausgezögert werden kann.

Eine solche Methode ist beispielsweise die Konservierung von Erhaltungsgrößen durch Projektion, auf die ich im Rahmen dieser Arbeit eingehen möchte. Dabei wird durch möglichst geringe Veränderungen der Trajektorien sichergestellt, dass bestimmte physikalische Erhaltungsgrößen auch während der Simulation numerisch erhalten bleiben. Diese Methode habe ich implementiert, getestet und bewertet.

Ich habe versucht die gesamte Problematik des N -Körperproblems inklusive Lie-Integration in möglichst kurzen Abschnitten zusammenzufassen. Im Anhang finden sich einige technische Details die, wie ich denke, immer wieder benötigt werden und deshalb erwähnenswert sind.

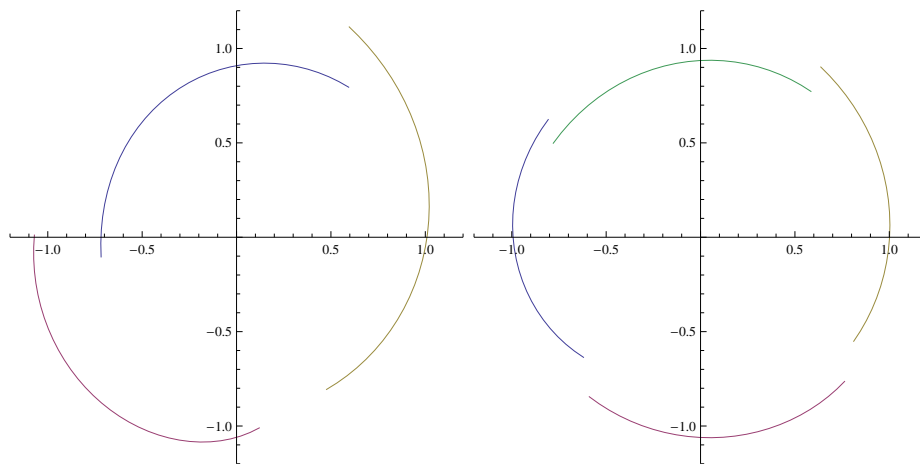


Abbildung 1: Übergang von drei bzw. vier Körpern ohne Zentralmasse vom Lagrange-Gleichgewicht in einen chaotischen Zustand

1 Einleitung

Oft gilt es in der Astronomie ein System von Differentialgleichungen zu lösen. Dafür gibt es eine große Anzahl von Verfahren (siehe dazu z.B. [2]). Problem ist oft das teils schlecht konditionierte Verhalten der Lösungstrajektorien. Kleine Veränderungen in den Ausgangsdaten bewirken dann speziell bei längeren Simulationszeiten signifikante Differenzen in den Observablen. Entgegen den Gesetzen der Physik gilt das oft auch für invariante Zustandsgrößen.

Ein Ansatz dieser Problematik entgegenzuwirken beruht auf Konservierung solcher invarianter Zustandsgrößen wie beispielsweise der Gesamtenergie in einem abgeschlossenen System. Nach dem Energieerhaltungssatz darf sich diese nicht ändern. Wenn sich jedoch im Laufe einer Simulation der numerische Wert der Gesamtenergie ändert liegt offensichtlich eine Datenungenauigkeit vor. Eine Idee ist, in regelmässigen Abständen die numerische Lösung zu korrigieren und so die Invarianz bestimmter Zustandsgrößen zu garantieren. Eine solche Korrektur soll naturgemäß so klein wie möglich sein.

Mathematisch betrachtet handelt es sich hier um Projektionen auf Mannigfaltigkeiten. Solche Projektionen werden im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt.

2 Bewegungsgleichung im \mathbb{R}^3

Ein System mit n Freiheitsgraden ist durch einen zeitlich veränderlichen Vektor $x(t) \in \mathbb{R}^n$ bestimmt. Es gilt $x(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, womit $x(t)$ also ein unendlich oft differenzierbarer Weg im Konfigurationsraum \mathbb{R}^n ist.

Betrachten wir nun N Teilchen im \mathbb{R}^3 . Diese haben $n = 3N$ Freiheitsgrade. Bereits seit Newton ist bekannt, dass $2n$ GröÙe reichen um die gesamte Trajektorie $x(t)$ eindeutig zu bestimmen.

$$\begin{aligned} q &= x(t) && N \text{ Positionen } (q_x, q_y, q_z) \\ v &= \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} && N \text{ Geschwindigkeiten } (v_x, v_y, v_z) \end{aligned}$$

Allgemein betrachtet ist die Trajektorie $x(t)$ die eindeutige Lösung des Dif-

Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= G(x, \dot{x}) \\ x(t_0) &= x_0 \\ v(t_0) &= v_0\end{aligned}$$

mit $G(x, \dot{x})$ einer Lipschitz-stetigen Funktion. Für die Bewegungsgleichungen gilt speziell

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + F(x) = 0$$

Dabei ist $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, genannt Massenmatrix, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Reibungsmatrix und $F(x) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet eine ortsabhängige Kraft. Aus diesen Annahmen folgt $G(x, \dot{x}) = -M^{-1}(C\dot{x} + F(x))$.

3 Das N -Körperproblem

Das N -Körperproblem besteht darin, eine Lösung für den Kurvenverlauf von mehreren Körpern unter dem Einfluss ihrer gravitativen Wechselwirkung zu bestimmen. Es stellt einen Spezialfall der obigen Bewegungsgleichung dar. Für das N -Körperproblem im \mathbb{R}^3 gilt:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N) =$	Positionsvektor
$= (x_1^{(x)}, x_1^{(y)}, x_1^{(z)}, \dots, x_N^{(x)}, x_N^{(y)}, x_N^{(z)})^T$	
$M = D(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$	Diagonalmatrix mit den Teilchenmassen
$C = 0$	leerer Raum, nicht dissipativ
$F(x) = \nabla V(x)$	konservatives Feld
$V(x) = -\kappa \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{ x_j - x_i }$	Gesetz von Newton

Dabei ist zu beachten, dass die x_i und x_j jeweils wieder aus je 3 Komponenten bestehen. κ bezeichnet die Gravitationskonstante. Es folgt unmittelbar

$$(\nabla V(x))_j = \kappa \sum_{1 \leq i \leq N, i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_j - x_i|^3} (x_j - x_i)$$

4 Hamilton Energie

Die Hamiltonenergie H der allgemeinen Bewegungsgleichung ist definiert als

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}v^T M v + V(q) = \\ &= \frac{1}{2}p^T M^{-1}p + V(q) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet q die Positionen, v die Geschwindigkeiten und $p = M\dot{q} = Mv$ die Impulse. Für das N -Körperproblem gilt somit

$$H = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i - \kappa \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|x_j - x_i|}$$

Die Energieerhaltung folgt aus $\nabla V(q) = -M\dot{v} - Cv$ und

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{1}{2}(\dot{v}^T M v + v^T M \dot{v}) + \nabla V(q) \cdot \dot{q} = \\ &= -v^T C v = 0 \end{aligned}$$

Im konservativem (nichtrelativistischem) Fall ist ein derartiges System mit Energieerhaltung stets charakterisiert durch

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \end{aligned}$$

Die Menge $\{(q, p) | q, p \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ bezeichnet man als Phasenraum.

5 Drehimpulserhaltung

Eine klassische Observable ist eine Funktion $f = f(q, p) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Für die zeitliche Ableitung verwendet man die Notation der Poisson-Klammer $\{f, H\}$ bzw. das Lie-Produkt $H \lrcorner f := \{f, H\}$.

$$\begin{aligned} \dot{f}(q, p) &= \frac{\partial f(q, p)}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f(q, p)}{\partial p} \dot{p} = \\ &= \frac{\partial f(q, p)}{\partial q} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} - \frac{\partial f(q, p)}{\partial p} \frac{\partial H(q, p)}{\partial q} = \\ &= \{f, H\} = H \lrcorner f \end{aligned}$$

Es gilt dass eine Observable genau dann erhalten bleibt wenn $H \lrcorner f = 0$. Solche Observablen heißen auch Invariante oder invariante Observablen.

Der Gesamtdrehimpulsvektor $L(q, p)$ ist gegeben durch

$$L(q, p) = \sum_{1 \leq i \leq N} q_i(t) \times p_i(t)$$

Mit einigem Aufwand kann gezeigt werden, dass $H \lrcorner L = 0_3$. Der Gesamtdrehimpulsvektor ist somit eine Größe die zeitlich erhalten bleibt.

6 Lösen von Differentialgleichungen nach Lie

Zur Veranschaulichung des Prinzips betrachten wir die Observable $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

Es gilt

$$\{\vec{\xi}, H\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \dot{\vec{\xi}}$$

Das ist ein Differentialgleichungssystem. Entwickeln die Lösung um eine Stelle $t = t_0$ liefert für $\Delta t = t - t_0$

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(t) &= \xi(t_0) + \Delta t \frac{d\vec{\xi}}{dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{d^2\vec{\xi}}{dt^2} + \dots = \\ &= \xi(t_0) + \Delta t \{\vec{\xi}, H\} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \{\{\vec{\xi}, H\}, H\} + \dots = \\ &= e^{\Delta t \{_, H\}} \vec{\xi}(t_0) \end{aligned}$$

Dieses Prinzip läßt sich verallgemeinern:

Lie-Methode zum Lösen von Differentialgleichungssystemen :

Gegeben sein ein Differentialgleichungssystem mit Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= \vartheta_i(z_1, \dots, z_k, t) \\ z_i(0) &= \zeta_i \end{aligned}$$

Der Lie-Operator D ist definiert als

$$D = \vartheta_1(\zeta_1, \dots, \zeta_k, t) \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \dots + \vartheta_k(\zeta_1, \dots, \zeta_k, t) \frac{\partial}{\partial \zeta_k}$$

Es gilt dann

$$z_i(t) = e^{tD}\zeta_i = \zeta_i + tD\zeta_i + \frac{t^2}{2}D^2\zeta_i + \dots$$

Im obigen Fall wäre somit der Lie-Differentialoperator

$$D = \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H(q,p)}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} = \{-, H\}$$

7 N -Körper Problem und Lie

Das klassische N -Körperproblem im \mathbb{R}^3 ist somit ein Differentialgleichungssystem aus $3N$ Differentialgleichungen 2.Ordnung oder äquivalent $6N$ Differentialgleichungen 1.Ordnung. Man beachte, dass es sich bei den q_i , v_i und p_i für $1 \leq i \leq N$ um jeweils 3-dimensionale Vektoren handelt und $v_i = \frac{p_i}{m_i}$.

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \ddot{q}_i = \kappa \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{m_j}{|q_j - q_i|^3} (q_j - q_i) \\ \dot{q}_i &= v_i \end{aligned}$$

Der entsprechende Lie-Differentialoperator findet sich z.B bei [2] und lautet

$$D = \sum_{d \in \{x,y,z\}} \sum_{j=1}^N \left(v_j^{(d)} \frac{\partial}{\partial q_j^{(d)}} - \kappa \sum_{1 \leq i \leq N, i \neq j} m_i m_j \frac{q_j^{(d)} - q_i^{(d)}}{|q_j - q_i|^3} \frac{\partial}{\partial v_j^{(d)}} \right)$$

Dieser läßt sich rekursiv bis zu jeder beliebigen Ordnung berechnen.

8 Konservierung von Erhaltungsgrößen durch Projektion

Wie bereits in der Einleitung erwähnt können sich entgegen physikalischer Grundsätze Erhaltungsgrößen $E(\xi) = E(\xi_0) = E_0$ während einer numerischen Simulation verändern. Diese Rechenungenauigkeiten können in schlecht konditionierten oder instabilen Systemen auch sehr gravierend ausfallen.

Eine Möglichkeit dieses Problem zu beheben besteht darin, die Lösungstrajektorie ξ zu korrigieren. Für den korrigierten Weg $\hat{\xi}$ soll gelten $E(\hat{\xi}) = E_0$, womit die Konstanz der Erhaltungsgrößen wieder gewährleistet ist. Gesucht ist also eine Projektion $\xi \rightarrow \hat{\xi}$ mit

1. $E(\hat{\xi}) = E_0$
2. $\|\xi, \hat{\xi}\| \rightarrow \min$

Die Wahl der Norm ist zunächst beliebig, muss aber letztendlich problemabhängig geeignet gewählt werden. Durch die Bedingung $E(\hat{\xi}) = E_0$ wird eine Mannigfaltigkeit im Phasenraum festgelegt. Es ist zu berücksichtigen, dass diese Methode nur dann zielführend sein kann wenn keine Singularität (z.B. der Zusammenstoss zweier Körper) vorliegt, wenn also die Erhaltungsobservablen in einer Umgebung um die Trajektorie gleichmässig stetig sind:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |\xi - \hat{\xi}| < \delta \Rightarrow |E(\xi) - E(\hat{\xi})| < \epsilon$$

9 Projektion für das N -Körperproblem

Sei $\vec{E}(q, p)$ ein Vektor von zu erhaltenden Observablen und $\vec{E}_0 = \vec{E}(q_0, p_0)$ der Vektor der zu erhaltenden Werte. In der Regel wird E entweder die Hamilton-Energie H , der Drehimpulsvektor $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)^T$ oder eine Kombination von beiden sein. Zu beachten ist, dass Ort q und Impuls p verschiedene Dimensionen haben. Die einfache Minimierung der Euklidischen Norm

$$\|(q, p), (\hat{q}, \hat{p})\| = \sqrt{\begin{pmatrix} q - \hat{q} \\ p - \hat{p} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} q - \hat{q} \\ p - \hat{p} \end{pmatrix}} \rightarrow \min$$

wird deshalb i.A. kein befriedigendes Ergebnis liefern¹. Eine Möglichkeit diese Problematik zu umgehen besteht z.B. in der Reskalierung der Zeit. Das ist nicht uneingeschränkt möglich und liefert auch dort, wo es möglich ist nicht notwendigerweise optimale Ergebnisse. Vernünftiger ist es deshalb sich auf eine Korrektur der Positionen q zu beschränken und die Impulse p unverändert zu lassen. Es bleibt folglich die Bestimmung der Ortskoordinaten \hat{q} bei gegebenen Impulsen p mit den Randbedingungen

1. $\vec{E}(\hat{q}, p) = \vec{E}_0$
2. $|q, \hat{q}| \rightarrow \min$

¹Das haben auch meine Simulationen bestätigt.

Der allgemein gebräuchlichste Ansatz ist jener mit Lagrange-Multiplikatoren:

$$\mathcal{L}(\hat{q}, \vec{\lambda}) = \frac{(q - \hat{q})^T \cdot (q - \hat{q})}{2} - \vec{E}(\hat{q}, p)^T \cdot \vec{\lambda} \rightarrow \min$$

Die partiellen Ableitungen von $\mathcal{L}(\hat{q}, \vec{\lambda})$ nach sämtlichen $3N$ Komponenten von $\hat{q} = (\hat{q}_1^{(x)}, \hat{q}_1^{(y)}, \hat{q}_1^{(z)}, \dots, \hat{q}_N^{(x)}, \hat{q}_N^{(y)}, \hat{q}_N^{(z)})$ liefert

$$\hat{q} - q = \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial \hat{q}} \right)^T \cdot \vec{\lambda}$$

An dieser Stelle benötigt man die Approximation

$$\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial \hat{q}} \right)^T \approx \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial q} \right)^T$$

Diese Approximation ist nur vertretbar wenn sich die Gradienten der Observablen lokal nicht zu sehr verändern. Ist dies jedoch der Fall befindet man sich sowieso in der Nähe einer Singularität und die Trajektorien sind von Haus aus nicht mehr zuverlässig zu bestimmen. Wir ersetzen deshalb und erhalten für k Observable die k Gleichungen in den k Komponenten des Vektors $\vec{\lambda}$ bei gegebenen (q, p)

$$\vec{E} \left(q + \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial q} \right)^T \cdot \vec{\lambda}, p \right) = \vec{E}_0$$

Annäherung am Gradienten liefert in erster Näherung

$$\vec{\lambda} = - \left(\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial q} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial q} \right)^T \right)^{-1} \cdot \left(\vec{E}(q, p) - \vec{E}_0 \right)$$

Unmittelbar weitere Näherungen für $\vec{\lambda}$ sind wegen obiger Approximation nicht sinnvoll. Theoretisch kann aber das Verfahren beliebig oft hintereinander durchgeführt werden. Es zeigt sich jedoch in der Praxis, dass im Fall einer unzufriedenstellenden ersten Näherung das System bereits weitgehend chaotisch ist.

Die vollständige Projektion lautet damit zusammengefasst:

$$q \rightarrow q - \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial q} \right)^T \cdot \left(\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial q} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial q} \right)^T \right)^{-1} \cdot \left(\vec{E}(q, p) - \vec{E}_0 \right)$$

10 N -Körper Problem ohne Zentralmasse

Lagrange Gleichgewicht :

Zunächst betrachte ich den naheliegensten Fall, nämlich das *Lagrange relative equilibrium*. Dabei werden N Körper gleicher Masse $m_i = 1$ an den Eckpunkten eines regelmässigen, planaren Polygons plaziert. Die Geschwindigkeitsvektoren werden so gewählt, dass sich Gravitationskräfte und Zentripedalkräfte zum Simulationsstart aufheben. Ich habe die Gravitationskonstante jeweils so gesetzt, dass ein Umlauf der Körper zu Simulationsstart jeweils genau 100 Zeiteinheiten benötigt. Weitere technische Details finden sich im Anhang D.

Es ist bekannt, dass es sich hierbei um instabile Lösungen handelt. Beliebige kleine Störungen in den Anfangsbedingungen sowie daraus resultierende Rechenungenauigkeiten werden das System über kurz oder lang aus dem Gleichgewicht bringen. In Tabelle 1 ist zusammengefasst, wie viele Umläufe lang sich die N Körper auf ihren vorgesehenen kreisförmigen Bahnen bewegen bevor sie diese verlassen. Die Methode der Projektion zur Konservierung

Anzahl Körper	Grav.-konst. κ	Umläufe bei Projektion auf			
		keine	H_0	\vec{L}_0	$H_0 + \vec{L}_0$
$N = 2$	0.015791	327.22	$\gg 10000$	$\gg 10000$	$\gg 10000$
$N = 3$	0.006838	6.17	6.13	6.11	6.12
$N = 4$	0.004125	5.70	5.73	5.87	5.93
$N = 5$	0.002868	4.98	4.71	4.72	4.71
$N = 6$	0.002160	4.60	4.62	4.62	4.63
$N = 7$	0.001713	3.45	3.48	3.49	3.50

Tabelle 1: Anzahl der Umläufe auf annähernd kreisförmigen Orbits. Da diese Konstellationen instabil sind verlassen die Körper danach ihre Orbits und das System wird chaotisch. Es versteht sich von selbst, dass diese Werte von den Simulationsparametern abhängen.

von Erhaltungsgrößen bringt hier für $N > 2$ nichts. Das bedeutet, dass der Zeitpunkt an dem das System chaotisch wird nicht durch die Rechenungenauigkeiten sondern schon durch die Ungenauigkeiten in den Anfangsdaten bestimmt ist.

Im Fall $N = 2$ bleiben die beiden Körper ebenfalls $\gg 10000$ Umläufe auf ihren Kreisbahnen, sie laufen jedoch zunächst ohne Projektion um einen Tick

zu schnell. Nach 327 Umläufen sind die Körper dann um 0.1% des Radius von ihrer theoretisch exakten Position entfernt. Projektion, egal ob auf H , auf \vec{L} oder auf eine Kombination von beiden gleicht diese Diskrepanz auf.

Die Methode der Konservierung von Erhaltungsgrößen durch Projektion hat also nicht dazu beigetragen, die Bahnen der Körper zu stabilisieren. Dafür hat sie aber die Zeitskala der Simulation korregiert.

Stabile Lösungen ohne Zentralmasse :

Dass es stabile Lösungen für N Körper gleicher Masse gibt ist zwar schon seit längerem bekannt, wurde aber erst 2000 in [1] publiziert. Für $N = 3$ ist die 8er-Schleife (Abbildung 3) mit großer Wahrscheinlichkeit die einzige stabile Konstellation. Dagegen gibt es für $N > 3$ zum Teil sehr überraschende Figuren wie in [6] illustriert.

Ich habe für die Achterschleife im Fall $N = 3$ zwei Simulationen durchgeführt, einmal mit Projektion auf H , einmal ohne. Da es sich um eine stabile Trajektorie handelt werden in beiden Fällen die Bahnen nicht verlassen. Wie bereits im Lagrange-Fall hat es sich gezeigt, dass im Fall ohne Projektion eine Zeitverschiebung eintritt während im Fall der Projektion auf eine konstante Hamilton-Energie H wieder der zeitliche Ablauf korregiert wird. Tabelle 2 gibt an, um wieviel Umläufe die drei Massen nach einer bestimmten Anzahl von Durchläufen des Achters nachhinken. Im Fall mit Projektion ist das nur auf Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen zurückzuführen.

# Umläufe des Achters U	Zeitverschiebung	
	Projektion auf H	ohne Projektion
1	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$
10	$2 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-6}$
100	$2 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-4}$
1000	$2 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-2}$
5478	$1 \cdot 10^{-4}$	1.0
10000	$2 \cdot 10^{-4}$	3.3

Tabelle 2: Zeitverschiebung (in Umlaufzeiten) nach U Achterumläufen

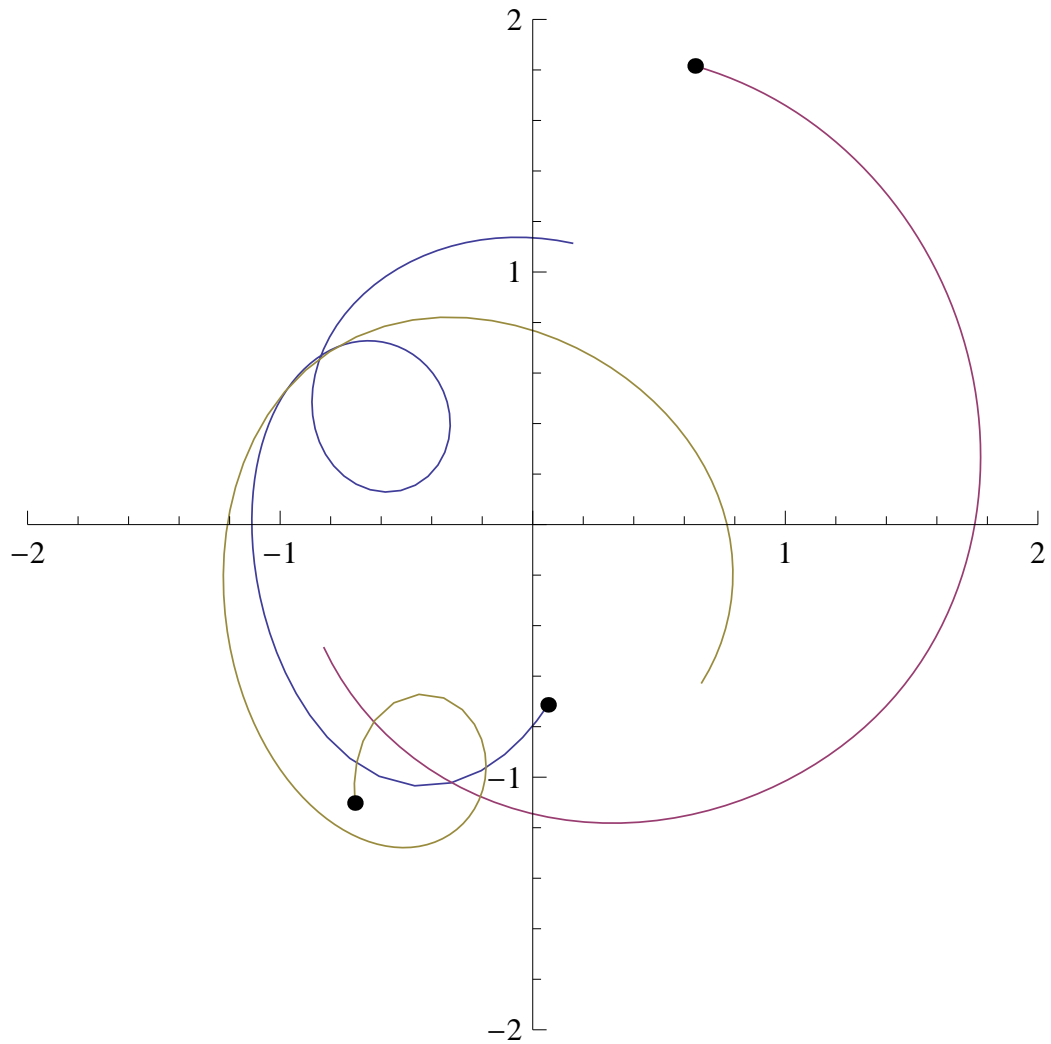


Abbildung 2: 3 gleichschwere Massen ohne Zentralmasse beim Übergang vom Lagrange-Gleichgewicht in einen chaotischen Zustand. Die Länge der Bahnkurven entspricht einer Umlaufzeit zum Startzeitpunkt. Die Mathematica-Animation dazu findet sich online auf [5].

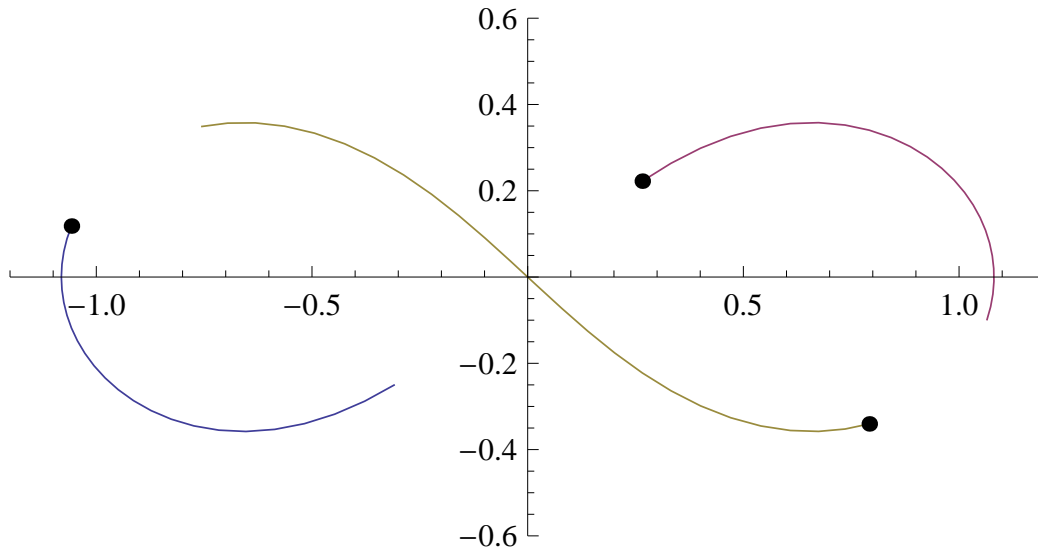


Abbildung 3: 3 gleichschwere Massen im stabilen Gleichgewicht auf einer 8er-Schleife

11 N -Körper Problem mit geringer Zentralmasse

Inwieweit hier eine stabile Lösung zu erwarten ist hängt von der Größe der Zentralmasse ab. Es gilt, je größer die Zentralmasse desto stabiler die Umlaufbahnen.

Eine detaillierte Abhandlung über die Stabilitätsverhältnisse von Satelliten im Orbit um eine Zentralmasse ist bei [7] gegeben. Die Autoren gehen dabei von einer verhältnismässig großen Masse M im Baryzentrum aus und vernachlässigen in ihrem Modell Fehler bis zu einer Größenordnung $O((\frac{m}{M})^{\frac{3}{2}})$. Eine Zielsetzung meiner Arbeit ist es, das N -Körperproblem für den nicht-baryzentrischen Fall zu untersuchen, d.h. die Zentralmasse sitzt nicht notwendigerweise im Schwerpunkt des Gesamtsystems. Ich modelliere deshalb im Gegensatz zu [7] die Masse M als gleichwertigen Körper.

Es gilt zwei Hauptfälle zu unterscheiden. Beim *Lagrange relative equilibrium* sitzen die Satelliten wieder an den Eckpunkten eines Polygons. Das ist aber nicht die stabilste Konstellation.

Es gibt nämlich neben dem Lagrange-Gleichgewicht für $N \leq 8$ Satelliten auf Kreisbahnen mit gleichem, konstanten Abstand vom Baryzentrum

zumindest eine zweite, stabilere Anordnung. Die Satelliten werden dabei in für den Grenzfall $M \rightarrow \infty$ exakt berechenbaren Winkelabständen plaziert. Diese Winkelabstände sind sämtlich kleiner als $\frac{2\pi}{N}$ und die Satelliten liegen damit dichter zusammen.

Darüber hinaus gibt es auch noch weitere Stabilitätsfälle bei denen ein Körper diametral zu den anderen plaziert wird. Auf diese werde ich jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht eingehen.

Lagrange Gleichgewicht :

Ich habe jeweils 1000 Umläufe um das Baryzentrum studiert. Nur im Fall "stabil" bleibt ein echtes Gleichgewicht bestehen. Im Fall "oszillierend" bleiben die Satelliten zwar im Orbit, beginnen aber gegeneinander zu schwingen. Letztlich im Fall "instabil" wird das System chaotisch. Die Gravitationskonstante ist wieder so gewählt, dass 100 Zeiteinheiten einer Umlaufzeit entsprechen. Für den Fall $M = \infty, N \leq 6$ läßt sich mit theoretischen Überlegungen zeigen, dass über kurz oder lang eine Schwingung eintreten wird. Nach 1000 Umläufen für eine Masse $M = 10^9$ waren die Positionen aber durchwegs noch stabil.

Anzahl Körper	Zentralmasse M			
	100	1000	10000	∞
$N = 2$	instabil	instabil	oszillierend	stabil/osz.
$N = 3$	instabil	instabil	oszillierend	stabil/osz.
$N = 4$	instabil	instabil	oszillierend	stabil/osz.
$N = 5$	instabil	instabil	oszillierend	stabil/osz.
$N = 6$	instabil	instabil	oszillierend	stabil/osz.
$N = 7$	instabil	stabil	stabil	stabil
$N = 8$	instabil	stabil	stabil	stabil
$N = 9$	instabil	stabil	stabil	stabil

Tabelle 3: Stabilitätsverhältnisse nach 1000 Umläufen für das *Lagrange relative equilibrium* bei verschiedenen Zentralmassen

Satelliten nicht äquidistant verteilt :

Wie bereits vorhin erwähnt beschränke ich mich auf jenen Fall in dem alle Sa-

telliten dichtestmöglichst zusammenliegen². Diese Konstellationen sind nach [7] durchwegs stabil für $2 \leq N \leq 8$. Die Konstellation für $N = 9$ ist kein echtes Gleichgewicht, kommt einem aber zumindest recht nahe. Äquivalent zum Lagrange-Gleichgewicht in Tabelle 3 gibt Tabelle 4 die Stabilitätsverhältnisse für nicht äquidistant verteilte Satelliten wieder.

Anzahl Körper	Zentralmasse M			
	100	1000	10000	∞
$N = 2$	stabil	stabil	stabil	stabil
$N = 3$	instabil	stabil	stabil	stabil
$N = 4$	instabil	stabil	stabil	stabil
$N = 5$	instabil	stabil	stabil	stabil
$N = 6$	instabil	stabil	stabil	stabil
$N = 7$	instabil	instabil	stabil	stabil
$N = 8$	instabil	instabil	stabil	stabil
$N = 9$	instabil	instabil	oszillierend	oszillierend

Tabelle 4: Stabilitätsverhältnisse nach 1000 Umläufen für die Gleichgewichtsfälle $2 \leq N \leq 8$ bei nicht äquidistant verteilten Satelliten für verschiedene Zentralmassen. Für $N = 9$ liegt kein Gleichgewicht vor sondern eine Konstellation die einem Gleichgewicht recht nahe kommt.

12 Nochmals Projektion

Eine wesentliche Aufgabe dieser Arbeit ist es die Methode der Projektion zur Konservierung von Erhaltungsgrößen zu testen. Ich habe sämtlichen Simulationen deshalb sowohl ohne als auch mit Projektion durchgeführt. Bei den Simulationen mit Projektion habe ich Projektion auf H und Projektion auf \vec{L} verschieden kombiniert. Auch habe ich mehrmals hintereinander projiziert.

Es ist mir in keinem Fall gelungen durch Projektion die Stabilität einer Trajektorie nachhaltig zu verbessern. Die Methode der Konservierung von Erhaltungsgrößen durch Projektion hat stets nur zeitliche Korrekturen gebracht. Die Bahnkurven selbst wurden jedoch abseits von Singularitäten nie signifikant verändert.

²Für $2 \leq N \leq 6$ und $N = 8$ gibt es jeweils noch einen weiteren Fall, für $N = 7$ sogar drei.

Ebenfalls erwähnenswert ist, dass ich eine starke Korrelation zwischen Projektion auf H und Projektion auf \vec{L} erkennen konnte. In der Regel wird deshalb die Projektion auf eine der beiden Erhaltungsgrößen ausreichen.

A Elliptizität

Eine markante Kenngröße für den Orbit eines Körpers ist die Elliptizität. Diese ist durch den Distanzvektor \vec{r} von einer Zentralmasse M sowie dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} für jeden Punkt der Trajektorie eindeutig bestimmt. Es handelt sich also in unserer Nomenklatur um eine Observable, die allerdings nicht erhalten bleibt.

Zur Berechnung der Elliptizität gehe ich davon aus, dass sich der Körper lokal auf einer Ellipsenbahn befindet. Aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz und der Zentripetalkraft folgt für die Geschwindigkeit v und die Umlaufzeit U eines Körpers auf einem kreisförmigen Orbit mit Distanz a von einer Zentralmasse M :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM}{a}} \\ U &= \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}} \end{aligned}$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz sind die Umlaufzeiten auf elliptischen Bahnen nur von der Ausdehnung der großen Halbachse abhängig, also $U = U(a, b) = U(a)$. Weiters gilt wegen der Drehimpulserhaltung (zweites Keplersches Gesetz)

$$\frac{2ab\pi}{U} = |\vec{r} \times \vec{v}|$$

Hier bezeichnet \vec{r} den Vektor von der Zentralmasse zum Körper. Das liefert einen Zusammenhang zwischen a und b :

$$b^2 = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}|^2}{GM} a$$

Die Geschwindigkeit v eines Körpers in Distanz $r = |\vec{r}|$ von einer Zentralmasse habe ich bereits früher hergeleitet [4].

$$v(r) = \frac{2\pi a \sqrt{2ra - r^2}}{rU}$$

Daraus folgt die Ausdehnung der großen Halbachse

$$a = \frac{r}{2 - \frac{rv^2}{GM}}$$

und weiters auch die Elliptizität ϵ :

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

B Zufallsorbits auf der Einheitskugel

Ich bin im Laufe meiner Arbeit auf die Problemstellung gestossen einen Körper auf einem kreisförmigen Zufallsorbit plazieren zu müssen. Das ist zwar an und für sich nicht schwierig, ich halte es trotzdem für erwähnenswert, auch um später bei ähnlichen Problemstellungen wieder darauf zurückgreifen zu können. Das Plazieren eines zufälligen Punktes Q mit Ortskoordinaten \vec{q} auf der Einheitskugel geht mit Hilfe zweier im Intervall $[0, 1[$ gleichverteilten Zufallsgrößen n_1 und n_2 .

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \cos(2\pi n_1) \sqrt{n_2 - n_2^2} \\ 2 \sin(2\pi n_1) \sqrt{n_2 - n_2^2} \\ 1 - 2n_2 \end{pmatrix}$$

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} ist durch die Gravitationskonstante κ und der Umlaufzeit eindeutig festgelegt. Für die Richtung benötigt man eine weitere im Intervall $[0, 1[$ gleichverteilte Zufallsgröße n_3 . Es gilt

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} \sin(2\pi n_1) \cos(2\pi n_3) + \cos(\pi n_1)(1 - 2n_2) \sin(2\pi n_3) \\ -\cos(2\pi n_1) \cos(2\pi n_3) + \sin(\pi n_1)(1 - 2n_2) \sin(2\pi n_3) \\ -2\sqrt{n_2 - n_2^2} \sin(2\pi n_3) \end{pmatrix}$$

C Normalverteilte Zufallsgrößen

Die einfachste Methode normalverteilte Zufallsgrößen zu konstruieren geht mit Hilfe der Transformation

$$g = \sqrt{-2 \ln n_1} e^{2\pi i n_2}$$

Dabei sind n_1 und n_2 zwei unabhängige, im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Realteil und Imaginärteil von g sind dann jeweils $N(0, 1)$ -verteilt und unkorreliert.

D Technische Details

Um verschiedene Simulationen vergleichbar zu machen müssen sie skaliert werden. Ich habe mich dazu entschlossen die Gravitationskonstante κ jeweils so zu wählen, dass die Umlaufzeit eines Körpers mit Masse $m = 1$ und Distanz $r = 1$ vom Massenschwerpunkt des Systems auf einer Kreisbahn eine Konstante *circulation* Zeiteinheiten benötigt. So einen Körper nenne ich einen "Normalkörper". Wenn nicht anders angegeben ist *circulation* = 100. Daraus folgt eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{\text{circulation}}$.

Für die Feinheit der Integration hat es sich für *circulation* = 100 als optimal erwiesen, eine Zeiteinheit, also $\frac{1}{\text{circulation}}$ der Umlaufzeit eines "Normalkörpers", weiter in 64 Teilintervalle zu unterteilen. Damit besteht die Integration über einen vollen Umlauf eines "Normalkörpers" für *circulation* = 100 aus 6400 Teilintegrationen, bzw. ein Integrationsschritt geht über 3.375 Bogenminuten. Mit diesem Setting reicht Lie-Integration bis zur 12. Ordnung für double precision in jedem Fall aus.

Die Simulation habe ich in Fortran 90 implementiert. Erstens aus Gründen der Kompatibilität zu verwandten Programmen, zweitens wegen des einfacheren Speichermanagements gegenüber C, aber drittes vor allem wegen der Parallelisierbarkeit der Problemstellung. Hilfreiche Unterstützung findet sich z.B. bei [8].

E Mathematica Animationen

Auf meiner Homepage [5] finden sich einige Mathematica-Animationen zum N -Körperproblem. Startpunkt dazu ist das Package `nbody.m`.

Die Funktion `PlotPath[Data_, Tail_, WinSize_]` startet die Animation. `Data_` ist eine Matrix mit den $6N$ Spalten und muß eingelesen werden:

$$q_1^{(x)}, v_1^{(x)}, \dots, q_N^{(x)}, v_N^{(x)}, q_1^{(y)}, v_1^{(y)}, \dots, q_N^{(y)}, v_N^{(y)}, q_1^{(z)}, v_1^{(z)}, \dots, q_N^{(z)}, v_N^{(z)}$$

Jede Zeile gibt dabei einen Zeitpunkt an. Die v -Koordinaten sowie sämtliche (z) -Koordinaten werden nicht verwendet. `Tail_` gibt die zeitliche Länge der Trajektorie an. `WinSize_` gibt die Größe des Animationsfensters an.

Literatur

- [1] Alain Chenciner, Richard Montgomery **A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses** *Annals of Mathematics*, 152 (2000), 881-901,
http://www.emis.de/journals/Annals/152_3/chencine.pdf
- [2] Siegfried Eggl, Rudolf Dvorak **An Introduction to common Numerical Integration Codes used in Dynamical Astronomy**, *Institute of Astronomy, University of Vienna*
- [3] Ernst Hairer, Christian Lubich, Gerhard Wanner **Geometric Numerical Integration - Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations**, *Springer Series in Computational Mathematics*
- [4] Michael Kenn **Übungen zur Astronomie II**, *Institute of Astronomy, University of Vienna*,
http://www.kenn.at/Astronomie/Astro_I_09.pdf
- [5] Michael Kenn **Webpace of Michael Kenn - N-Body**,
<http://www.kenn.at/Nbody>
- [6] Christoph Pöppe **Himmlisches Ballett** *Spektrum der Wissenschaft*, 98-99, Januar 2006,
<http://www.wissenschaft-online.de/artikel/833246>
- [7] H. Salo, C.F. Yoder **The dynamics of coorbital satellite systems**, *Astron. Astrophys.* 205, 309-327 (1988)
- [8] Variouse Authors **Numerical Recipes in Fortran 90, Second Edition**, <http://www.nrbook.com/a/bookf90pdf.php>