

Spezialisierungsmodul Computational Physics 260093 PR

Michael Kenn

19. September 2013

Zusammenfassung

Protokoll über Untersuchungen zur numerischen Stabilität von co-orbitalen Satelliten. Eine asymptotisch stabile, co-orbitale Satellitenkonstellation wird durch Auslenkung in eine Eigenrichtung ihrer Störmatrix in eine Schwingung versetzt. Abhängig vom Massenverhältnis der Satelliten zum Zentralkörper kann dieses System nach einer bestimmten Zeit chaotisch werden. Skizzen vom Langzeitverhalten solcher Störungen nehmen fraktale Konturen an.

1 Einleitung

Eines von drei Kriterien, die ein Himmelsobjekt zu einem Planeten machen ist, dass es das dominierende Objekt seiner Umlaufbahn ist. Das bedeutet, das Objekt hat durch sein Gravitationsfeld seinen Orbit über die Zeit von weiteren Objekten geräumt. Für ein massereiches Objekt in einer Umlaufbahn um seine Sonne ist das auch die Regel. Betrachtet man allerdings den Hauptring des Astroidengürtels, so umfasst dieser weit weniger als ein Prozent der Erdmasse. Die davon ausgehende Gravitationskraft reicht weder aus einen Planeten zu bilden noch ein Orbit zu säubern. Viele kleinere Satelliten bewegen sich auf sehr ähnlichen Umlaufbahnen. Man spricht hier von co-orbitalen Objekten.

Ein anderes Beispiel sind zwei von der Voyager-Sonde entdeckte Monde des Saturn ([2],[5]), die sich - nur 50 km radial getrennt - einen fast gemeinsamen Orbit in 151400 km Entfernung vom Planeten teilen. Stabilitätsuntersuchungen zeigen, dass sich diese beiden Objekte bis auf 15000 km annähern, dann aber, entgegen der Intuition, eine abstossende Kraft wirksam wird. Der Grund dafür ist ([5]), dass unmittelbar vor der Kollision die Gravitationskraft zwischen den beiden Objekten den vorderen Mond leicht bremst, dieser dadurch geringfügig an Höhe verliert und nach dem zweiten Keplerschen Gesetz deshalb beschleunigt. Aus der selben Überlegung heraus beschleunigt die Gravitation den hinteren Mond, worauf dieser leicht gehoben und damit langsamer wird.

Stabile Konstellationen von N gleich schweren, co-orbitalen Objekten werden in [3] ausgiebig behandelt. Werden die Satelliten in Form eines regelmässigen Polygons angeordnet, so ist eine solche Anordnung erst für $N \geq 7$ auf Dauer stabil. Für $N \geq 9$ sind das auch die einzigen stabilen Konstellationen. Dagegen gibt es für $N \leq 8$ stabile Konstellationen, bei denen die Satelliten in bestimmten Winkelabständen aufgefädelt sind.

Erlaubt man co-orbitale Körper mit unterschiedlichen Massen so eröffnet sich ein breites Forschungsfeld. In [4] wird gezeigt, dass es im Fall N ungerade bei vorgegebener Winkelseparation der

Objekte stets eine Set an Massen gibt, sodass Stabilität gewährleistet ist. Allerdings muss diese Lösung (beispielsweise wegen negativer Massen) nicht notwendigerweise physikalisch sein.

2 Mathematische Grundlagen

Im Weiteren gehen wir von N gleich schweren Massen m aus, die sich in einem Co-orbit mit durchschnittlichem Radius r um eine Zentralmasse M befinden. Die Positionen der Satelliten seien in Polarkoordinaten (r_i, φ_i) gegeben. Die Bewegungsgleichungen für die Winkel φ_i lauten bis auf eine Ordnung $O(\frac{m}{M})$ ([2],[3],[5])¹

$$\ddot{\varphi}_i = \frac{3v^2 m}{M} \sum_{j \neq i} f'(\varphi_i - \varphi_j) \quad \text{mit} \quad f(\varphi) = \cos \varphi - \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} \quad (1)$$

Zu Stabilitätsanalyse entwickelt man um eine Gleichgewichtsposition $(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n)$ und erhält

$$\delta \ddot{\varphi}_i = \frac{3v^2 m}{M} \sum_{j \neq i} (\delta \varphi_j - \delta \varphi_i) f''(\bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_j) \quad (2)$$

Der Ausdruck (2) ist von der Form $\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ mit $\mathbf{x} = (\delta \varphi_1, \dots, \delta \varphi_n)$. Folglich müssen sämtliche Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A} positiv sein. Für $N = 2$ ist das nur der Fall für die Gleichgewichtsposition $|\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2| = 60^\circ$, wogegen die diametrale Anordnung $|\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2| = 180^\circ$ einen negativen Eigenwert aufweist und so asymptotisch instabil ist. Ähnlich ist für $N = 3$ die Anordnung $|\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2| = |\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_3| \approx 47.360860^\circ$ stabil, wogegen die Konstellation eines gleichseitigen Dreiecks langfristig instabil ist².

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die radiale Auslenkung $\delta r_i = \frac{|r_i - r|}{r}$ um eine Größenordnung $O(\sqrt{\frac{m}{M}})$ kleiner ist als $\delta \varphi_i$ und für die Stabilitätsuntersuchung nicht berücksichtigt wird.

3 Initiale Störungen der Gleichgewichtslage

Bislang wurde von $M \gg m$ ausgegangen. Man könnte sich nun fragen, inwieweit das Massenverhältnis Auswirkungen auf das Stabilitätsverhalten hat. Um das herauszufinden wurde eine große Anzahl von Simulationen durchgeführt, wobei für verschiedene Massenverhältnisse $\frac{M}{m}$ jeweils verschiedene initiale Auslenkungen $\delta \varphi$ aus der Gleichgewichtslage entlang der Eigenvektoren der Störmatrix \mathbf{A} durchprobiert wurden. Das Ergebnis ist äußerst verblüffend.

In Abbildung 1 ist der Fall $N = 2$ dargestellt. Die initiale Auslenkung geschieht entlang des Eigenvektors $(1, -1)$ der Störmatrix. Dieser Eigenvektor beschreibt eine horizontale, symmetrische Schwingung der beiden Objekte. Eine initiale Störung von $\delta \varphi$ bedeutet also, dass die beiden Objekte initial $60^\circ + 2\delta \varphi$ voneinander getrennt sind. Die Initialgeschwindigkeit und der initiale radiale Abstand aller orbitalen Objekte sind hier und in allen weiteren Untersuchungen stets v und r .

Im Fall $N = 3$ hat die Störmatrix zwei positive Eigenwerte. Die eine Störung hat Eigenvektor $(1, 0 - 1)$ und ist ähnlich dem oben beschriebenen Fall $N = 2$. Der mittlere Satellit bleibt ungestört, während die beiden äußeren Satelliten um $\delta \varphi$ von ihrer Gleichgewichtslage (Winkeldistanz $\approx 47.36^\circ$ zum zentralen Objekt) nach außen verschoben werden. Das Verhalten für eine solche Störung ist in Abbildung 2 zu sehen.

¹Aus den Keplerschen Gesetzen folgt $v^2 = \frac{GM}{r}$

²Eine Simulation findet sich auf http://www.kenn.at/Nbody/L3_Z6_P0_T3.swf

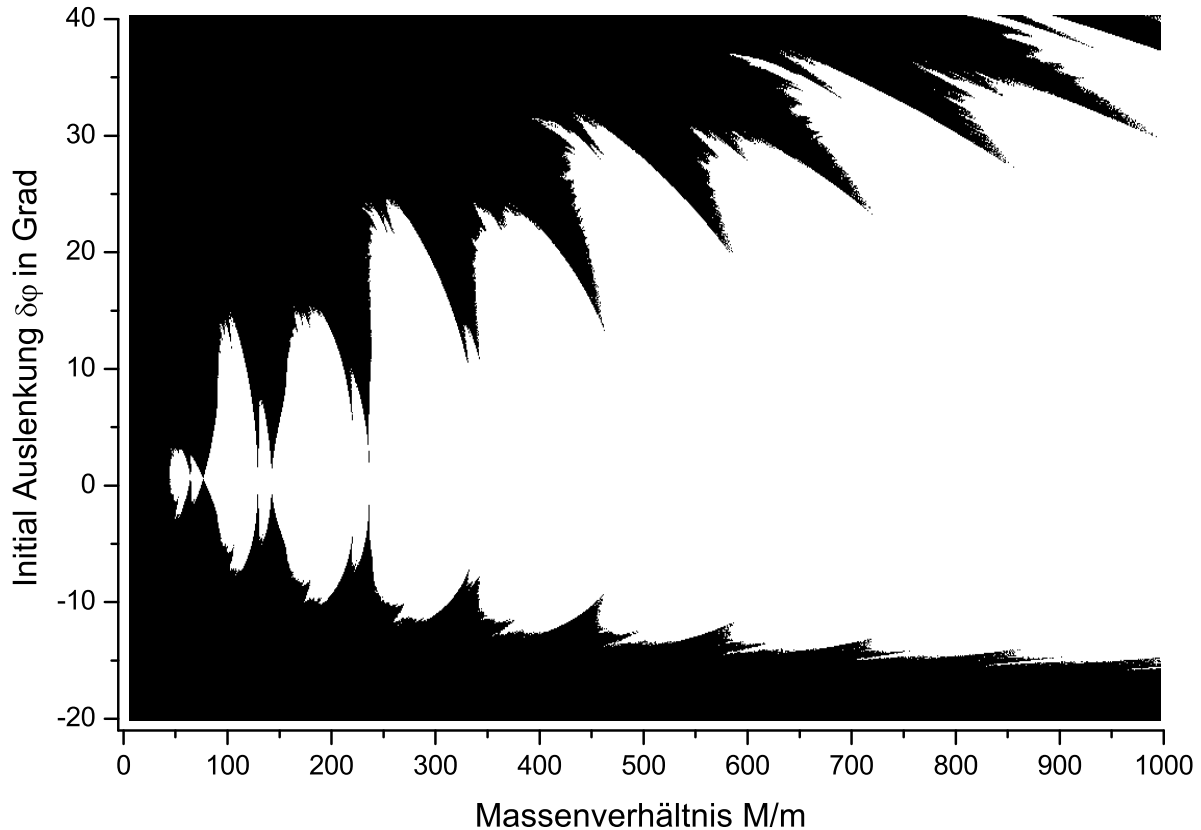


Abbildung 1: $N = 2$, initiale Störung in Richtung Eigenvektor $(1, -1)$. Schwarzer Punkt heißt, nach spätestens 10000 Umläufen ist das System chaotisch. Weißer Punkt heißt, das System ist mindestens 100 Umläufe stabil.

Die andere Störung hat Eigenvektor $(1, -2, 1)$. Hier werden die äußeren beiden Objekte um jeweils $\delta\varphi$ weitergeschoben und das mittlere Objekt um $-2\delta\varphi$ im Orbit zurückgesetzt. Auf eine Abbildung mußte hier wegen der großen Anzahl von fehlenden Berechnungen verzichtet werden.

3.1 Verfeinerungen des Rasters

Die Abbildungen 1 und 2 weisen zweifelsohne fraktale Strukturen auf. Was ist also naheliegender als in die Abbildungen zu zoomen? Mit feinerem Raster nimmt allerdings der Rechenaufwand schnell zu. Das ist nicht nur durch die größere Anzahl von Rasterpunkten bedingt sondern vor allem durch den Umstand, den Rand immer genauer analysieren zu müssen. Abbildung 3 zeigt einen 10-fachen Zoom eines Ausschnitts der Abbildung 1.

Die fraktalen Strukturen verschwimmen. Offensichtlich reichen die Integrationsmethode und die Rechengenauigkeit hier nicht mehr aus um einen scharfen Rand erkennen zu lassen. Um das zu prüfen wurden einige Datenpunkte nahe des Randes mit verschiedenen Methoden neu berechnet. Drei Ansätze wurden dazu herangezogen:

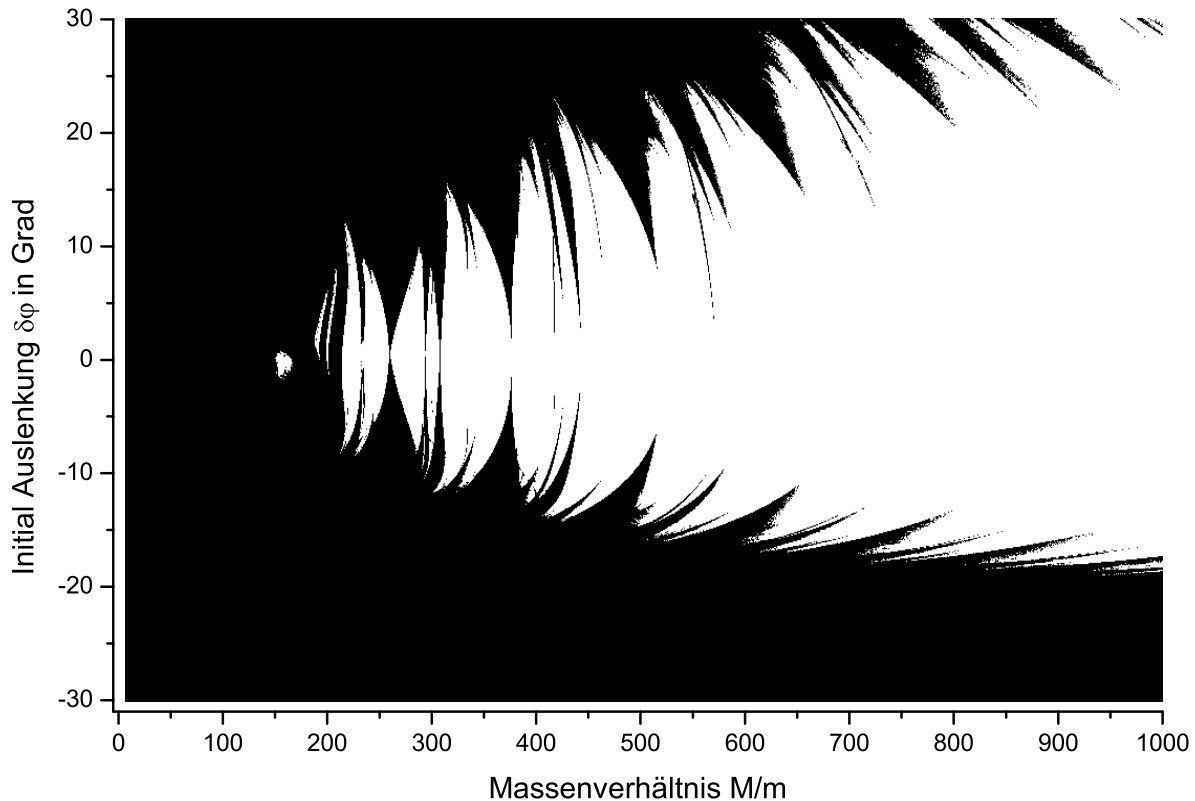


Abbildung 2: $N = 3$ und initiale Störung in Richtung Eigenvektor $(1, 0, -1)$. Schwarzer Punkt heißt, nach spätestens 5000 Umläufen ist das System chaotisch. Weißer Punkt heißt, das System ist mindestens 100 Umläufe stabil.

Höhere Rechengenauigkeit: Für einige ausgewählte Randpunkte wurde die Rechengenauigkeit von Double-Präzision auf Quadruple-Präzision angehoben. Das chaotische Verhalten des Systems stellt sich zumeist einige wenige Umläufe später ein. Für Punkte nahe des Randes ist es nahezu unmöglich zu entscheiden, ob es sich um ein numerisches Problem handelt oder ob das System tatsächlich chaotisch wird.

Feinere Integration: In der Basisversion werden pro Umlauf etwa 100 Integrationsschritte durchgeführt, wobei jede Integration wiederum in 16 Unterschritte unterteilt wird. Verfeinert man die Integration auf 32, 64 oder 128 Unterschritte, so läßt sich die Stabilität des Systems zeitlich um bis zu einen Faktor 5 verlängern. Das ist ein sicheres Indiz dafür, dass am Rand numerische Probleme schlagend werden.

Einfachere Integrationsmethoden: Eine Lie-Integration 4.Ordnung mit 16 oder mehr Unterschritten, zusätzlich mit der Möglichkeit orthogonal auf die Trajektorien konstanter Energie zu projizieren, ist ein ziemlich umfangreiches Unterfangen. Deshalb wurde auch eine Version mit wesentlich einfacheren Integrationsmethoden, beispielsweise mit dem Verlet-Algorithmus, getestet. Leider hat

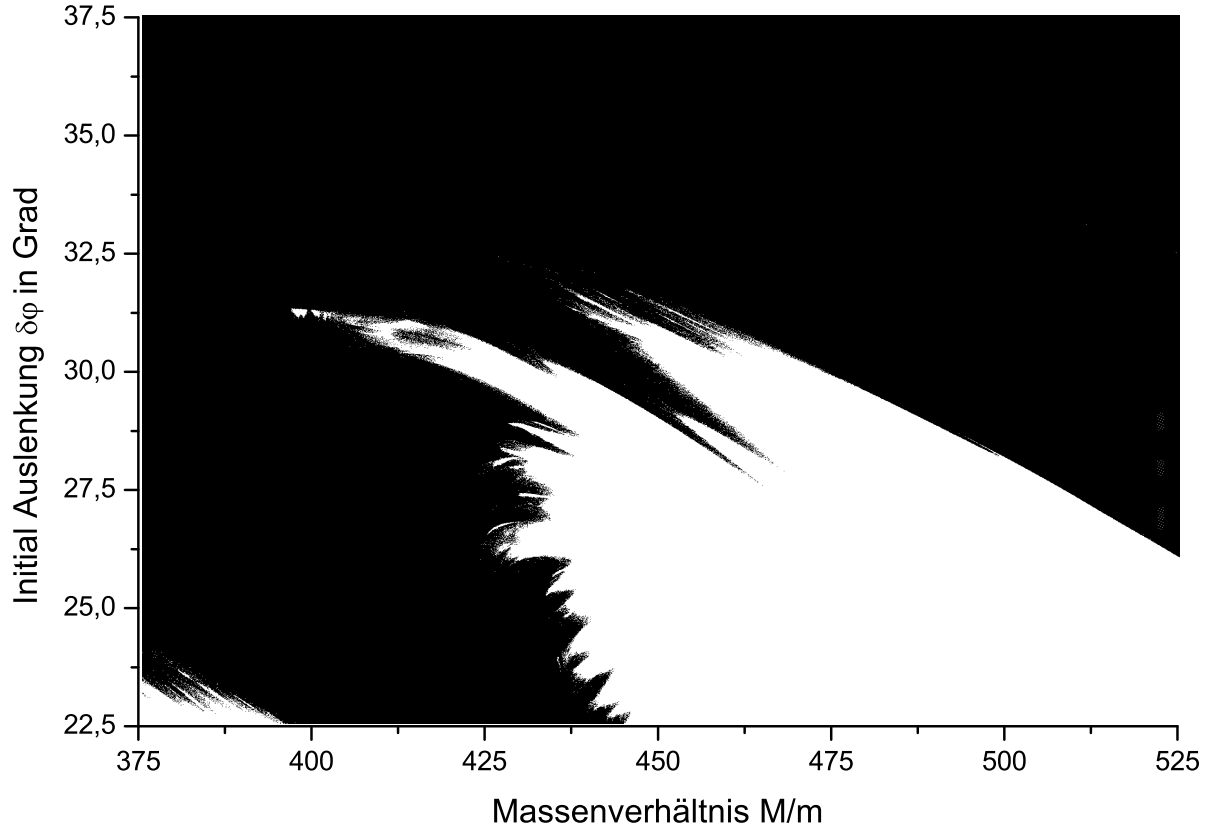


Abbildung 3: $N = 2$, initiale Störung in Richtung Eigenvektor $(1, -1)$. 10-facher Zoom eines Ausschnitts oben Mitte der Abbildung 1.

sich herausgestellt, dass diese Ansätze sämtlich nicht geeignet sind mehrere 1000 Umläufe eines Mehrkörpersystems zu simulieren.

4 Langfristige Konvergenz

Das vorangegangene Kapitel hat gezeigt, dass der Verlauf des Randes von der numerischen Rechenungenauigkeit abhängen sein dürfte. Was aber, wenn JEDE Startkonstellation bei genügend langer Rechendauer über kurz oder lang in einem chaotischen System endet? Das das nicht ganz abwegig ist zeigt folgende Überlegung:

Für ein Raster mit Auflösung $\Delta \frac{M}{m} = 1$ und $\Delta \delta\varphi = 0.1^\circ$ gibt es für $10 \leq \frac{M}{m} \leq 600$ und $-20^\circ \leq \delta\varphi \leq 40^\circ$ insgesamt $(600 - 10 + 1) \times ((40 - (-20)) \cdot 10 + 1) = 355191 < \infty$ Startpositionen. Man definiert h_n als die Anzahl jener Fälle, in denen das System zwischen 1.5^{n-1} und 1.5^n Umläufen in einen chaotischen Zustand übergeht. Abbildung 4 zeigt diese Funktion. Wegen der endlichen Anzahl von Rasterpunkten muss, um überhaupt stabile Konstellationen zu garantieren, diese Funktion asymptotisch zumindest wie $\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ mit $\varepsilon > 0$ fallend sein. Der leichte Anstieg am rechten Rand widerspricht dieser These und könnte ein Indiz dafür sein, dass, unabhängig von der

n	$U_n = 1.5^n$	h_n
21	4988	3243
22	7482	2343
23	11223	1636
24	16834	1173
25	25251	847
26	37877	681
27	56815	527
28	85223	485
29	127834	396
30	191751	357
31	287627	344
32	431440	361
33	647160	457

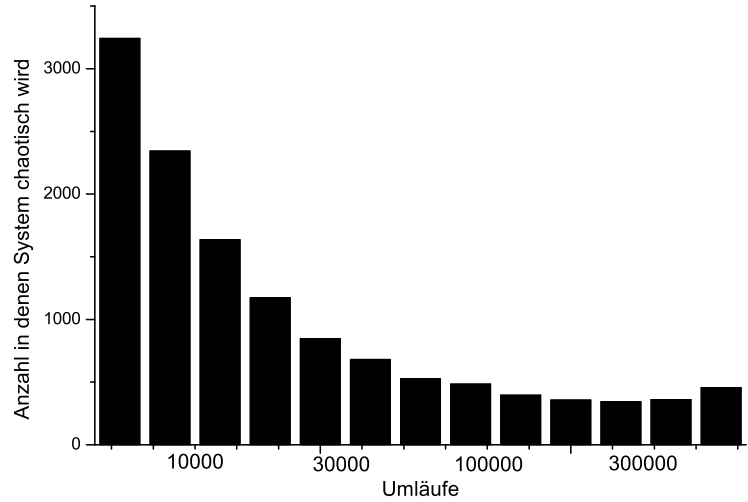


Abbildung 4: Anzahl der Fälle h_n , in denen das System zwischen U_{n-1} und U_n Umläufen chaotisch wird. Der leichte Anstieg am rechten Rand könnte ein Indiz dafür sein, dass bei genügend langer Rechenzeit das System aus numerischen Gründen immer chaotisch wird.

Startkonstellation, das System über kurz oder lang chaotisch wird.

5 Zusammenfassung

In co-orbitalen Satellitensystemen wurden für verschiedene Massenverhältnisse $\frac{M}{m}$ asymptotisch stabile Konstellationen initial entlang von Eigenvektoren der Störmatrix ausgelenkt. Skizziert man die Ergebnisse, so erhält man fraktale Strukturen. Eine genaue Analyse zeigt jedoch, dass der Verlauf des Randes stark von numerischen Effekten abhängt und deshalb nicht notwendigerweise physikalischer Natur ist.

A Implementierung

A.1 Integration

Die Simulationen werden mit einem Lie-Integrator 4.Ordnung durchgeführt, der auch bereits in [1] in Verwendung war. Die Anzahl der Integrationschritte pro Umlauf wird mit etwa 100 festgelegt, die nochmals jeweils in 16 Unterschritte unterteilt werden. Es besteht optional die Möglichkeit orthogonal auf die Trajektorien konstanter Energie zu projizieren.

A.2 Simulationen

Zunächst wird der gesamte zu überprüfende Bereich in ein Raster mit Diskretisierung $\Delta \frac{M}{m}$ und $\Delta \delta\varphi$ unterteilt. Die initiale Threshold gibt an, wieviele Umläufe mindestens für jeden Rasterpunkt simuliert werden sollen. Wird das System chaotisch bricht der Algorithmus ab und die Konstellation wird als chaotisch vermerkt. Ein verlässliches Kriterium für ein chaotisches System ist eine radiale Abweichung von mehr als 10% vom durchschnittlichen Abstand r zum Zentralkörper. Iterativ wird

der Rand berechnet, indem die Threshold kontinuierlich bis zu ihrem finalem Wert angehoben wird. Die Berechnung wird abgebrochen sobald am Rand für die finale Threshold an Umläufen das System stabil ist.

Abbildung	N	EV	$\Delta \frac{M}{m}$	$\Delta \delta\varphi$	TH initial	TH final
Abb. 1	2	(1, -1)	1	0.1°	100	10000
Abb. 2	3	(1, 0, -1)	1	0.1°	100	5000
o.Abb.	3	(1, -2, 1)	1	0.1°	100	5000
Abb. 3	2	(1, -1)	0.1	0.01°	10000	10000

Tabelle 1: Parameter der Berechnungen, EV ist der Eigenvektor der Störung, TH steht für die Threshold der Umläufe

Literatur

- [1] M. Kenn
Das N-Körperproblem, 2010 (Bachelorarbeit Astronomie)
<http://www.kenn.at/Nbody/nbody.pdf>
Projektseite: <http://www.kenn.at/Nbody/>
- [2] C. F. Yoder, G. Colombo, S. P. Synnott, K. A. Yoder
Theory of Motion of Saturn's Coorbiting Satellites, 1983
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0019103583902075>
- [3] H. Salo, C. F. Yoder
The dynamics of coorbital satellite systems, 1988
http://www.researchgate.net/publication/23597190_The_dynamics_of_coorbital_satellite_systems
- [4] S. Renner, B. Sicardy
Stationary Configurations for Co-orbital Satellites with Small Arbitrary Masses, 2003
http://www.lesia.obspm.fr/perso/bruno-sicardy/biblio/biblio/renn_sic_celmec.pdf
- [5] Gottfried Groschopf
Die koorbitalen Saturn-Monde 1980S1 und 1980S3, 1982
<http://www.wissenschaft-schulen.de/sixcms/media.php/1308/SuW7-8-1982-S304-306.pdf>