Hydrodynamik

KENN Michael

July 1, 2010

Abstract

Formelsammlung Hydrodynamik

Definition 1 (Parameter, Zustandsgrössen, Funktionen, Basics).

$$\begin{array}{rcl}
t & \ldots & \textit{Zeit} \\
\vec{x} & \ldots & \textit{Raumpunkt} \\
\rho(\vec{x},t) & \ldots & \textit{Dichte}, \qquad [\rho] = kg/m^3 \\
\vec{u}(\vec{x},t) & \ldots & \textit{Geschwindigkeit}, \qquad [\vec{u}] = m/s \\
m(t) & \ldots & \textit{Masse}, \qquad [m] = kg \\
P(\vec{x},t) & \ldots & \textit{Druck}, \qquad [P] = N/m^2 \\
S(t) & \ldots & \textit{Entropie} \\
\epsilon & \ldots & \textit{spezifische innere Energie}, \qquad [\epsilon] = J/kg
\end{array}$$

Satz 1 (Massenstrom, Massenerhaltung).

$$-\frac{\partial m}{\partial t} = \oint \rho \vec{u} d\vec{f}, \qquad \rho\vec{u} \ldots \textit{ Flussdichte}$$

Daraus läßt sich (Gauss) herleiten:

Satz 2 (Kontinuitätsgleichung).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{u}) = 0$$

Korollar 1 (radiale Symmetrie, stationäre Lösung).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho u_r) = 0$$

Zusätzlich stationär, also $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$*:*

$$4r^2\pi\rho u_r = \dot{m} = const$$

Satz 3 (Kraft F vs. Druck P).

$$F = -\oint P d\vec{f} = -\int_V \vec{\nabla} P dV = m \cdot \vec{a} = \int \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV$$

Daraus folgt (einiges Rechnen)

Satz 4 (Euler-Gleichung).

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} + \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} = 0$$

Kein Wärmeaustausch in idealen Flüssigkeiten, adiapatisch, $\frac{dS}{dt} = 0$. Wieder einiges Rechnen:

Satz 5 (Kontinuitätsgleichung für Entropiedichte)**.**

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \nabla(\rho S\vec{u}) = 0$$

Mit Enthalpie $H = E + PV$ und $S = 0$ folgt wegen $dH = TdS + VdP = VdP$ und weiters $\vec{\nabla}H = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P$ nach kurzer Rechnung:

Satz 6 (Bewegungsgleichung für konstante Entropie)**.**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} &= \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) \\
\vec{\omega} &= \vec{\nabla} \times \vec{u} \qquad \textit{Wirbelstärke=Vortizität} \\
\vec{\omega} \cdot \vec{u} &= \omega \qquad \textit{Helizität, wie stark verschraubt}
\end{aligned}$$

Satz 7 (Bernoulli-Gleichung)**.** *Entlang von Stromlinien gilt:*

$$\frac{u^2}{2} + H = const.$$

Aus Physik I:

$$\frac{\rho u^2}{2} + \rho g h + p = const.$$

Definition 2 (Gesamtenergie einer Strömung)**.** *ϵ sei die spezifische innere Energie in Energie/Masse.*

$$Gesamtenergie = \frac{\rho u^2}{2} + \rho\epsilon$$

Wieder Thermodynamik + Nablaidentitäten. Daraus folgt:

Satz 8 (Energiegleichung)**.**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\rho u^2}{2} + \epsilon\rho) + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}(\frac{u^2}{2} + h)) = 0$$

Satz 9 (Gleichung für innere Energie)**.**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \vec{\nabla}(\rho\epsilon\vec{u}) + P\vec{\nabla}\vec{u} = 0$$

A Formeln

Formel 1 (∇ bei radialer Symmetrie)**.**

$$\nabla f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} \tag{1}$$

Formel 2 (Totale (substantielle Ableitung)**.**

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{u}(\nabla A) \tag{2}$$