Astrophysik

KENN Michael, 8725258

20. Dezember 2011

Zusammenfassung

Zusammenfassung Astrophysik

Einleitung Viele Fragen wurden gestellt. Viele Antworten gegeben. Einiges haben wir verstanden, gemerkt hat sich trotzdem keiner was. Vieles ist "eh kloar", passt aber eben nicht langfristig in den Kopf. Dieses Dokument umfasst die Eckpunkte, die ich mir merken würde, wenn es mein seniles Hirn zuließe. Ich setze Vorwissen voraus, d.h. man sollte wissen, was die einzelnen Begriffe und Variable bedeuten.

Sternaufbaugleichungen Es empfielt sich, m und t als unabhängige Variablen zu wählen (Lagrange). Insgesamt handelt es sich um $N+4$ Gleichungen in den $N+4$ Variablen r, P, l, T sowie $X_1,\ldots X_N$ mit $\sum X_i = 1$. Andere Variable sind in Abhängigkeit von P, T und $X_1,\ldots X_N$. Der Gradient $\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$ ist eine Variable und kein Operator. Herleitung thermodynamischer Teil in $\frac{\partial l}{\partial m}$ ist zach.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial m} &= \frac{1}{4\pi r^2 \rho} && \text{Massengleichung} \\
\frac{\partial P}{\partial m} &= -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} && \text{Hydrost. Gleichgewicht} \\
\frac{\partial l}{\partial m} &= \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu - c_P\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} && \text{Energietransport, thermisch} \\
\frac{\partial T}{\partial m} &= -\frac{Gm}{4\pi r^4}\frac{T}{P}\nabla && \text{Energietransport} \\
\frac{\partial X_i}{\partial t} &= \frac{m_i}{\rho}\left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik}\right) && \text{chem. Zusammensetzung}
\end{aligned}$$

Randbedingungen Neben den trivialen Randbedingungen ist die Definition der Oberfläche wichtig. Die ist durch die Photosphäre definiert, und zwar dort, wo die optische Tiefe $\tau = \int_R^\infty \kappa\rho dr = \frac{2}{3}$.

Thermodynamische Größen

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P}\right)_T,\ \delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P,\ \varphi = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu}\right)_{P,T} \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \alpha\frac{dP}{P} - \delta\frac{dT}{T} + \varphi\frac{d\mu}{\mu}$$

$$PV = NkT = nRT,\ \rho = \frac{\mu n}{V},\ \frac{P}{\rho} = \frac{R}{\mu}T = (c_P - c_V)T = (\gamma - 1)c_V T = (\frac{c_P}{c_V} - 1)c_V T$$

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = \gamma\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S, \qquad \text{ideales Gas (isotherm): } c_s^2 = \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$$

Gradient Der Gradient ∇ ist bei Konvektion (adiabatische Bubbles) anders als bei Strahlung.

$$\nabla_{\mathrm{rad}} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_{\mathrm{rad}} = \frac{3}{16\pi acG}\frac{\kappa l P}{mT^4}$$

$$\nabla_{\mathrm{ad}} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_S = \frac{P\delta}{T\rho c_P}$$

Konvektion tritt dort ein, wo Ledoux-Kriterium (bzw. Schwarzschild Kriterium bei $\nabla_\mu = 0$) nicht gilt. Herleitung erfolgt, indem man sich adiabatische Zellen anschaut und checkt, wann diese aufsteigen.

$$\nabla_{\mathrm{rad}} < \nabla_{\mathrm{ad}} + \frac{\varphi}{\delta}\nabla_\mu \qquad \text{Ledoux-Kriterium, } \nabla_\mu = \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln P}\right)_S$$

$$\nabla_{\mathrm{ad}} < \nabla_{\mathrm{rad}} < \nabla_{\mathrm{ad}} + \frac{\varphi}{\delta}\nabla_\mu \qquad \text{Semi-Konvektion}$$

∇_{ad} wird klein z.B. in Ionisationszonen, ∇_{rad} wird groß z.B. bei nuklearer Energieerzeugung $\rightarrow$ Konvektion.

Oberflächenanalyse erfolgt durch Betrachtung von $\frac{\partial T}{\partial P}$ und Kramer-Opazität $\kappa = \kappa_0 P^a T^b$ mit $a = 1$ und $b = -4.5$. Das liefert $T^{8.5} = B(P^2 + C)$ mit definiertem B und Integrationskonstante C. Gewöhnlich (ideales einatomiges Gas) ist $\nabla_{\mathrm{ad}} = \frac{2}{5}$, je nach Größe von ∇_{rad} liegt eine radiative ($C > 0$) bzw. convective ($C < 0$) Hülle vor.

Erhaltungssätze

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\mathbf{u}) = 0 \qquad \text{Massenerhaltung, Kontinuitätsgleichung}$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\mathbf{u}\cdot\rho\mathbf{u}) = -\nabla P - \rho\nabla\Psi + \mathbf{j}\times\mathbf{B} + \ldots \qquad \text{Impulserhaltung, Bewegungsgleichung}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\vec{\nabla})\mathbf{u}\right) = \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla P - \rho\nabla\Psi + \mathbf{j}\times\mathbf{B} + \ldots$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\mathbf{u}(E + P)) = 0, \qquad E = \rho(\epsilon + \frac{\mathbf{u}^2}{2}) \qquad \text{Energieerhaltung}$$

Zeitskalen

$$\tau_{\text{nuc}} = \frac{0.1 \cdot 0.007 \cdot Mc^2}{L} \qquad \text{0.1 wird verheizt, 0.007 Masse wird umgesetzt}$$

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{1}{2}\frac{GM^2}{\alpha RL} \qquad \text{thermische Zeitskala, } E_{\text{grav}} + 2E_{\text{therm}} = 0$$

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{R}{c_s} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \qquad \text{mechanische Zeitskala, } c_s^2 = \frac{GM}{R}$$

Jeans Annahmen: isotherm, ideales Gas für Zustandsgleichung, spärisch symmetrisch. Linearisiere gestörte Kont.-Gl., Bew.-Gl., Poisson-Gl.(Jeans-Schwindel), $c_s^2 = \frac{P_1}{\rho_1} \rightarrow$ (inhomogene) Wellengleichung für Druckstörung $P_1 = Ae^{\imath(kx-\omega t)}$, Dispersionsrelation.

$$\lambda_J \propto \sqrt{\frac{T}{\mu\rho}} \rightarrow M_J \propto \sqrt{\frac{T^3}{\mu^3\rho}}$$

Druckloser Kollaps[1]: Kont.Gl. $\rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + u\frac{\partial m}{\partial r} = 0 \rightarrow$ Massenschalen überholen sich nicht. Bewegungsgleichung $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{dt} = u'u = -\frac{Gm}{r^2}$ integrieren $\rightarrow dt = F(r)dr$ integrieren $\rightarrow$

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}}}$$

Minimale Masse: Energieabgabe $A = \frac{GM^2}{R}\frac{1}{\tau_{\text{ff}}}$ bzw. $B = 4\pi\sigma R^2 fT^4$. Alles Roger bzw. isotherm solange $B \gg A$. Irgendwann kann Energie nicht mehr abgegeben werden ($A \approx B$): $M_{\text{J,min}} \propto \frac{T^{\frac{1}{4}}}{f^{\frac{1}{2}}} \approx 0.35\, M_\odot$.

Akkretionsströmungen Kernmasse M_c groß, konstantes $\dot{M} \rightarrow \rho \propto r^{-\frac{3}{2}} \ldots$

Dynamische Stabilität Wie reagiert eine hydrostatische Konfiguration auf eine adiabatische Kompression?
Störungsansatz $\rightarrow$ homogene Wellengleichung für δR. Betrachte thermodynamische Größe $\Gamma_1(\ln T) = \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}$ (entspricht *gamma*). $\Gamma_1 > \frac{4}{3}$ ist stabil, $\Gamma_1 < \frac{4}{3}$ sind Ionisations- und Dissoziationszonen und instabil.

Polytropen Ein möglicher Ausgangspunkt ist die Poisson-Gleichung

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r} = g = \frac{Gm}{r^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}$$

[1] Das ist meiner Meinung nach ungenau im Skript

Man geht zu einer normierten, dimensionslosen Variable θ über

$$\psi = \psi_c \theta(z), \qquad \rho = \rho_c \theta^n(z), \qquad P = P_c \theta^{n+1}(z)$$
$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{d\theta}{dz}\right) + \theta^n(z) = 0, \qquad z \propto r$$

Es gilt $\gamma = 1 + \frac{1}{n} = \frac{f+2}{f} = \frac{c_P}{c_V}$. Für monoatomic ideales Gas oder vollständig entartetes Elektronengas gilt $\gamma = \frac{5}{3}$, für relativistisches, vollständig entartetes Elektronengas $\gamma = \frac{4}{3}$. Nachteil der Polytropentheorie sind die unbekannten Zentralkonstanten, im Grenzfall der vollständigen Entartung sind diese jedoch herleitbar. Für $\gamma = \frac{4}{3}$ ist die Masse unabhängig vom Radius $\rightarrow$ Chandrasekhar'sche Grenzmasse $M_{\mathrm{ch}} = \frac{5.836}{\mu_e^2} M_\odot$.

Grenzfall für $n \rightarrow \infty$ ist die isotherme Kugel, auch Bonner-Ebert-Sphäre genannt.

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{d\Phi}{dz}\right) = e^{-\Phi} = \eta, \qquad \rho = \rho_c \eta$$

Aufwendiges Rechnen liefert den maximalen möglichen Ausdruck bei $z_{\max} = 6.47$ und $\frac{\rho_c}{\rho_{\max}} = 14.13$.

Weisse Zwerge Weisse Zwerge werden durch den (quantenmachanischen) Fermidruck stabilisiert, der aus dem Pauli-Prinzip resultiert. Entsteht durch kleine Störungen in der Kernregion. Ansatz:

$$\rho = C P^\alpha T^{-\delta} \rightarrow \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} = \frac{4\alpha - 3}{3\delta} \rightarrow \text{steigt für ideales Gas } (\alpha = \delta = 1) \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{fällt für } \gamma = \frac{5}{3} (\alpha = \frac{3}{5}, \delta \approx 0) \rightarrow \text{stabilisiert für } \gamma = \frac{4}{3}$$

Aus Kramer-Opazität und diversen Strahlungs- und Energiegleichungen folgt für eine typische Oberfläche $L = 0.2\, T_*^{3.5}$ mit großem T und ρ und kleinem L. Kühlung langsam $\tau \propto \left(\frac{L}{M}\right)^{-\frac{5}{7}} \approx 10^9$ yrs, wird aber durch Kristallisation beschleunigt.

Virialtheorem Leitet sich her aus Bewegungsgleichung, rechte Seite inkl. Lorentz $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Viel umformen, Trägheitsmoment $I = \int_M \mathbf{r}^2 dm$, thermische Energie $\int_V P dV = (\gamma - 1)\, E_{\mathrm{therm}}$, Lorentz wird zu E_{mag} + Oberflächenterm.

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2E_{\mathrm{kin}} + 3(\gamma - 1)E_{\mathrm{therm}} + E_{\mathrm{grav}} + S$$

Stellares Gleichgewicht $3(\gamma - 1)E_{\mathrm{term}} + E_{\mathrm{grav}} = 0 \rightarrow E = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}$. Für $\gamma = \frac{4}{3}$ indifferentes Gleichgewicht. Für $\gamma = \frac{5}{3}$ wird die Hälfte der Energie abgestrahlt, die andere Hälfte in die Erhöhung von E_{term} gesteckt.
Interstellare Wolke: Oberflächenterm externer Druck berücksichtigen, einiges Rechnen liefert (über den Radius) die minimale Temperatur für ein stabiles Gleichgewicht. Grenzmasse proportional zu M_J.
Magnetische Konfigurationen: $E_{\mathrm{mag}} + E_{\mathrm{grav}} = 0$, es folgt $M_c \propto \frac{B_0^3}{\rho^2}$.
Magn. Fluss Φ_M bleibt bei unendl. Leitfähigkeit erhalten, Masse ebenso $\rightarrow B/B_0 = (\rho/\rho_0)^\kappa$.
Kompliziert: $\rho_c/\rho \leq\ll 30$ bzw. $R/R_0 = 1 - (M/M_c)^2 \rightarrow$ Gleichgewichtsradius für $M < M_c$.

Stosswellen TODO

Sonstiges :
adiabatisch: $dS = \frac{dq}{T} = 0$
$E_{\text{grav}} = -\int \frac{Gm_{\text{in}}}{r} dm_{\text{shell}} = -\int \frac{G}{r}(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho)(4\pi r^2 \rho dr)$
Dispersion... Abhängigkeit einer Größe von der Frequenz
$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \nabla)$ (vektoriell) bzw. $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\nabla$ (skalar)