Astronomie I
Beispiel 9

KENN Michael, 8725258

7. November 2009

Bestimmung der Geschwindigkeit v im Punkt (x, y) :
Seien a und b die große und die kleine Halbachse einer Planetenbahn, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt und U die Umlaufzeit des Planeten um die Sonne. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass die Ellipse bzw. die Tangente am Punkt (x, y) gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \qquad \text{Ellipse} \\ \frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy &= 1 \qquad \text{Tangente an den Punkt } (x, y) \end{aligned}$$

Die Sonne stehe im linken Brennpunkt, also habe die Koordinaten $(-e, 0)$. $\vec{r}$ sei der Vektor von der Sonne zum Planeten, $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ der Geschwindigkeitsvektor des Planeten. Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz ist $|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = F$ mit F konstant für alle Punkte auf der Ellipse. Da der Geschwindigkeitsvektor eines Punktes parallel zum Tangentialvektor ist gilt:

$$\begin{aligned} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| &= \left| \begin{pmatrix} x+e \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \lambda \begin{pmatrix} \frac{y}{b^2} \\ -\frac{x}{a^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \\ &= |\lambda| \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x(x+e)}{a^2} \right) = \\ &= |\lambda| \left(1 + x\frac{e}{a^2} \right) = F \end{aligned}$$

Die nach Kepler II pro Zeiteinheit überdeckte Fläche beträgt $\frac{F}{2}$ (annähernd Dreiecke) und die Gesamtfläche einer Ellipse $ab\pi$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \frac{F}{2}U &= ab\pi \\ F &= \frac{2ab\pi}{U} \\ |\lambda| &= \frac{2ab\pi}{U} \left(1 + x\frac{e}{a^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Das gibt für die Geschwindigkeit v

$$\begin{aligned} v = |\dot{\vec{r}}| &= \frac{2ab\pi}{U\left(1 + x\frac{e}{a^2}\right)} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} = \\ &= \frac{2ab\pi}{U\left(1 + x\frac{e}{a^2}\right)} \sqrt{\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + \frac{1}{b^2}} \end{aligned} \tag{1}$$

bzw. für die Distanz r des Planeten von der Sonne

$$\begin{aligned} r = |\vec{r}| &= \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{(x+e)^2 + (1 - \frac{x^2}{a^2})b^2} = \\ &= a + \frac{ex}{a} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$x = \frac{(r-a)a}{e}$$

Substituiert man x in (1) erhält man

$$v(r) = \frac{2\pi a\sqrt{2ra - r^2}}{rU} \tag{2}$$

Geschwindigkeit als Funktion von der Distanz zur Sonne $v(r)$:
Die Geschwindigkeiten im Aphel und im Perihel sind jetzt mit (2) leicht zu bestimmen:

$$\begin{aligned} v_{\text{Aphel}} = v(a+e) &= \frac{2\pi ab}{U(a+e)} \\ v_{\text{Perihel}} = v(a-e) &= \frac{2\pi ab}{U(a-e)} \end{aligned}$$

Für nicht zu große e besteht eine nahezu lineare Korrelation zwischen r und v. Um das zu veranschaulichen entwickelt man $v(r)$ um die Stelle a:

$$v(r) = \frac{2\pi a}{U}\left(1 + \frac{a-r}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + O\left(\left(\frac{a-r}{a}\right)^3\right)\right)$$

Da r in der Regel sehr nahe bei a liegt ergibt das folgende überaus gute[1] Approximation

$$v(r) \approx \frac{2\pi(2a-r)}{U} \tag{3}$$

Bestimmung der Halbachsen aus Aphel (A) und Perihel (P) :

$$\begin{aligned} a &= \frac{A+P}{2} \\ e &= \frac{A-P}{2} \\ \Rightarrow b &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{A-P}{2}\right)^2} = \sqrt{AP} \end{aligned}$$

Results :
Siehe Excel sheet
Nach Kepler III ist $\frac{a^3}{U^2}$ konstant (Excel sheet). Daraus ergibt sich für Eris eine Umlaufzeit von ca. 556 yr.

[1] Für die Erde ist der maximale Fehler im Aphel und lediglich $4,37 m/s$