Astronomie II
Beispiel 39

Heuritsch Julia (0904211), Kenn Michael (8725258)

17. Juni 2010

Gezeitenkräfte :
Es gilt wegen $F^{(P)} = F^{(Z)}$:

$$\begin{aligned} \frac{GMm}{D^2} &= m\omega^2 D \\ \omega^2 &= \frac{GM}{D^3} \end{aligned}$$

$F_1^{(P)}$ und $F_1^{(Z)}$ sind die Beträge der Zentripedal- und Zentrifugalkraft des inneren Teils (der inneren Kugel), $F_2^{(P)}$ und $F_2^{(Z)}$ sind die entsprechenden Kräftebeträge für den äußeren Teil.

$$\begin{aligned} F_1^{(P)} &= \frac{GM\frac{m}{2}}{(D-\frac{r}{2})^2} \qquad & F_1^{(Z)} &= \frac{m}{2}\omega^2(D-\frac{r}{2}) = GM\frac{m}{2}\frac{D-\frac{r}{2}}{D^3} \\ F_2^{(P)} &= \frac{GM\frac{m}{2}}{(D+\frac{r}{2})^2} \qquad & F_2^{(Z)} &= \frac{m}{2}\omega^2(D+\frac{r}{2}) = GM\frac{m}{2}\frac{D+\frac{r}{2}}{D^3} \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen:

$$\begin{aligned} F_1^{(P)} &> F_1^{(Z)} \\ F_2^{(P)} &< F_2^{(Z)} \end{aligned}$$

Der Betrag der Gravitationskraft F_{12} zwischen innerer und äußerer Kugel ist

$$F_{12} = \frac{G(\frac{m}{2})^2}{r^2}$$

Damit gelten für die Stabilität des Körpers mit Masse m im Orbit des Zentralkörpers mit Masse M:

$$\begin{aligned} F_1^{(P)} - F_1^{(Z)} &< F_{12} \\ F_2^{(Z)} - F_2^{(P)} &< F_{12} \end{aligned}$$

Einsetzen und Auflösen dieser beiden Gleichungen liefert die Bedingung

$$\frac{m}{M} > 2\left(\frac{r}{D}\right)^2 \left(\mp 1 + \left(\frac{r}{D}\right) \pm \frac{4}{\left(\left(\frac{r}{D}\right) - 2\right)^2} \right)$$

Hier haben wir den Term in der letzten Klammer in eine Taylor-Reihe entwickelt:

$$\frac{m}{M} > 3\left(\frac{r}{D}\right)^3 \left(1 \pm \frac{1}{2}\left(\frac{r}{D}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{D}\right)^2 + \dots \right)$$

Da $r \ll D$ erhält man als Endresultat

$$\frac{m}{M} > 3\left(\frac{r}{D}\right)^3$$