Astronomie II
Beispiel 25

Heuritsch Julia (0904211), Kenn Michael (8725258)

22. Mai 2010

Gravitation :
Aus der Physik ist bekannt, dass die Gravitationskraft eines Massenschwerpunkts, welche auf einen Probekörper in einer Distanz z wirkt, sich zusammensetzt aus der Gesamtmasse um den Massenschwerpunkt innerhalb einer Distanz z. Die Säulendichte S, aus welcher diese Gesamtmasse errechnet werden muß, beträgt $S = 60\,M_\odot/\mathrm{pc}^2$. Die initiale Auslenkung des Sterns aus der Äquatorialebene ist $z_1 = 100\,\mathrm{pc}$ bzw. $z_2 = 1\,\mathrm{kpc}$. Die Umlaufdauer der Sonne beträgt $U = 225\,\mathrm{Myrs}$.

Unendlich dünne Schicht in der Äquatorialebene :
Die Gesamtmasse, welche zur Gravitation in einer Entfernung z beitragt, liegt ausschließlich in der Äquatorialebene und ist demnach:

$$M(z) \;=\; S\pi z^2$$

Damit unterliegt der Probekörper entsprechend Gravitationsgesetz einer Beschleunigung a

$$a \;=\; \frac{GM(z)}{z^2} = GS\pi$$

Aus den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} z(t) &= a\frac{t^2}{2} \\ v(t) &= at \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} t_{Q,i}^2 &= \frac{2z_i}{GS\pi} \\ t_i &= 4\,t_{Q,i} \end{aligned}$$

wobei t_Q die Zeit bis zur ersten Durchdringung der Äquatorialebene, also eine Viertel der Oszillationsperiode, bezeichnet. Einsetzen (mit besonderer

Vorsicht, was die Einheiten angeht) liefert

$$\begin{aligned} t_1 &= 61\,\text{Myrs} \\ t_2 &= 194\,\text{Myrs} \\ v_1(t_{Q,1}) &= 13\,\text{km/s} \\ v_2(t_{Q,2}) &= 40\,\text{km/s} \end{aligned}$$

Homogene Scheibe der Dicke $2z_D = 4$ kpc :
Die Dichte in der homogenen Scheibe beträgt

$$\rho = \frac{S}{2z_D}$$

Der Schwerpunkt der Gravitationsmasse liegt aus Symmetriegründen wieder in der Äquatorialebene. Da die initiale Auslenkung maximal ein Viertel der Dicke der homogenen Scheibe entspricht ($z_i \leq \frac{z_D}{2}$) ist die zur Gravitation beitragende Masse stets homogen verteilt.

$$M(z) = V(z)\rho = \frac{2\pi z^3 S}{3z_D}$$

Die Beschleunigung ist in diesem Fall ortsabhängig:

$$a(z) = \frac{GM(z)}{z^2} = \frac{2\pi GS}{3z_D} z$$

Die Beschleunigung $a(z)$ ist also proportional zur Auslenkung, was einen harmonischen Oszillator beschreibt:

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) + \omega^2 z(t) &= 0 \\ \omega &= \sqrt{\frac{2\pi GS}{3z_D}} \\ z(t) &= z_i\, e^{\imath\omega t} \\ t_i &= \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{6\pi z_D}{GS}} \end{aligned}$$

Wie bei einem harmonischen Oszillator nicht anders zu erwarten ist die Oszillationsperiode unabhängig von der initialen Auslenkung. Nach dem ersten

Viertel der Oszillationsperiode geht der Stern wieder durch die Äquatorialebene.

$$\begin{aligned} t_1 = t_2 &= 374\,\mathrm{Myrs} \\ v(\frac{t_1}{4}) = \omega z_1 &= 1.6\,\mathrm{km/s} \\ v(\frac{t_2}{4}) = \omega z_2 &= 16\,\mathrm{km/s} \end{aligned}$$

Exponentielle Schichtung mit Zentraldichte $\rho_0 = 0.1\,M_\odot/\mathbf{pc}^3$:
Zunächst bestimmen wir die Skalenhöhe H_z:

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \rho_0 e^{-\frac{z}{H_z}} \\ S &= 2\int_0^\infty \rho_0 e^{-\frac{z}{H_z}} dz \\ H_z &= \frac{S}{2\rho_0} \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt des Gravitationsfeldes liegt wieder in der Äquatorialebene. Damit gilt für die Gesamtmasse, die zur Gravitation eines Probekörpers in einer Entfernung z vom Schwerpunkt beiträgt:

$$\begin{aligned} M(z) &= \iiint_{|r|\leq z} \rho(r) dV = \\ &= \int_{-z}^{z} (z^2 - h^2)\pi\rho(h) dh = \\ &= 2\pi\rho_0(2H_z^2(H_z + z)e^{-\frac{z}{H_z}} + H_z(z^2 - 2H_z^2)) = \\ &= \frac{4}{3}\pi\rho_0 z^3 \left(1 - \frac{3}{8}\left(\frac{z}{H_z}\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{z}{H_z}\right)^2 + \dots\right) \\ a(z) &= \frac{GM(z)}{z^2} = \\ &= \frac{4}{3}G\pi\rho_0 z \left(1 - \frac{3}{8}\left(\frac{z}{H_z}\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{z}{H_z}\right)^2 + \dots\right) \end{aligned}$$

Die resultierende Differentialgleichung ist nicht homogen und kann auch elementar nicht gelöst werden. Speziell für den Fall $z_2 = 1\,\mathrm{kpc}$ muß die Potenzreihe sehr weit entwickelt werden damit man annähernd richtige Resultate

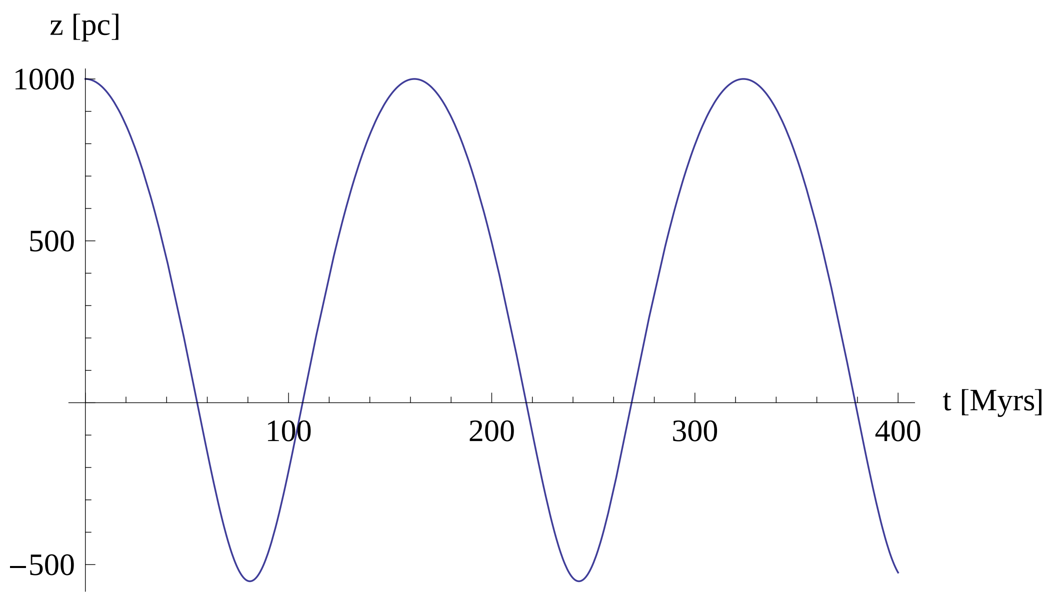

Abbildung 1: Raum-Zeit Funktion

erhält. Wir haben deshalb die pragmatische Variante gewählt und die Differentialgleichung numerisch mit Mathematica gelöst. Die Schwingungen des Sterns sind auch nicht mehr symmetrisch zur Äquatorialebene. Dennoch stellt sich erwartungsgemäß eine Periodizität ein. Folgende Werte wurden von uns numerisch bestimmt:

$$\begin{aligned} t_1 &= 145\,\mathrm{Myrs} \\ t_2 &= 162\,\mathrm{Myrs} \\ v_1(z=0) &= 4.1\,\mathrm{km/s} \\ v_2(z=0) &= 30.5\,\mathrm{km/s} \end{aligned}$$

In den beiden Abbildungen 1 und 2 sind die Raum-Zeit Funktion sowie das Phasendiagramm der Lösung für $z_2 = 1\,\mathrm{kpc}$ zu sehen.

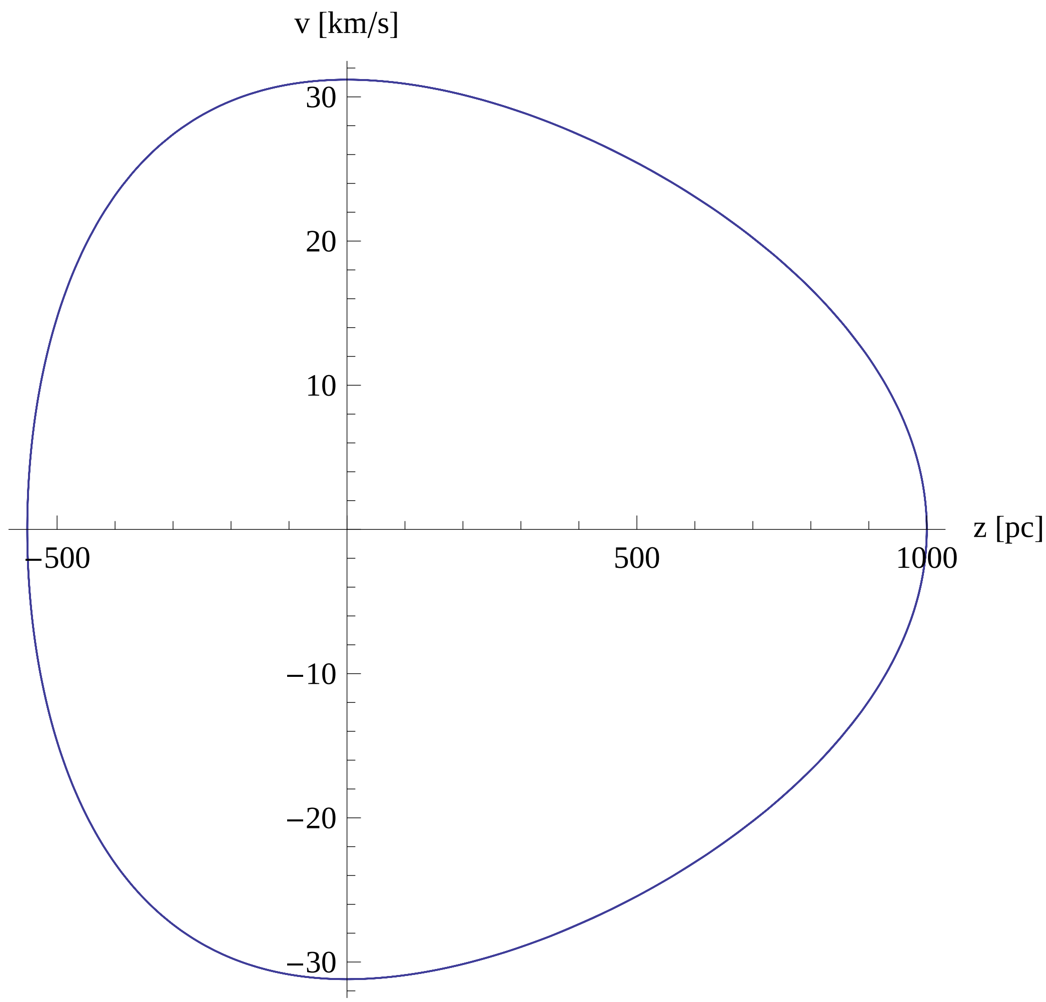

Abbildung 2: Phasendiagramm