Astronomie II
Beispiel 19

Heuritsch Julia (0904211), Kenn Michael (8725258)

12. Mai 2010

Massenverteilung bei konstanter Rotationsgeschwindigkeit :

$$
\begin{aligned}
F_G &= \frac{G \cdot M(r)}{r^2} \Delta m \\
F_C &= \omega^2 r \Delta m = (\frac{v_{\mathrm{rot}}(r)}{r})^2 r \Delta m = \frac{v_{\mathrm{rot}}(r)^2}{r} \Delta m
\end{aligned}
$$

Ist v_{rot} konstant dann folgt aus $F_G = F_C$ unmittelbar

$$M(r) \propto r$$

Aus $\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$ folgt der radiale Dichteverlauf

$$\rho(r) \propto r^{-2}$$

Rotationsgeschwindigkeit um Zentralmasse :
Nach dem 3.Keplerschen Gesetz gilt für Umlaufzeiten $u(r)$

$$r^3 \propto u^2(r)$$

Für die Geschwindigkeit $v(r)$ gilt demnach

$$v(r) = \frac{2\pi r}{u(r)} \propto \frac{r}{\sqrt{r^3}} = r^{-\frac{1}{2}}$$

Rotationsgeschwindigkeit für Dichteverteilung $\rho(r) \propto r^{-2}$:
Wir gehen hier von einer sphärischen Massenverteilung aus:

$$
\begin{aligned}
\frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) \\
M(r) &= 4\pi \int_0^r s^2 \rho(s) ds = \\
&= 4\pi r \propto r
\end{aligned}
$$

Aus $F_G = F_C$ folgt

$$M(r) \quad \propto \quad rv^2(r)$$

und deshalb die Umkehrung zu oben

$$v(r) \quad \equiv \quad \text{const.}$$

Dichte $\rho(r)$ **für** $v_{\mathbf{rot}}(r) \propto r$:

$$\begin{aligned} M(r) &\propto rv^2(r) \propto r^3 \\ \Rightarrow \frac{dM(r)}{dr} &\propto r^2 \\ \Rightarrow 4\pi r^2 \rho(r) &\propto r^2 \\ \Rightarrow \rho(r) &\equiv \text{const.} \end{aligned}$$

Bahndrehimpuls $L(r)$:
Der Bahndrehimpuls ist gegeben durch

$$L(r) \quad = \quad rMv_{\text{rot}}(r)$$

Da M einer Gaswolke konstant ist, gilt

$$L(r) \quad \propto \quad rv(r)$$

Verrücken zweier Gaswolken mit Bahndrehimpulserhaltung :
Geht man davon aus, dass sich die Rotationsgeschwindigkeiten durch die Verschiebung nicht ändern dann gilt

$$\Delta r_1 M_1 v_1 + \Delta r_2 M_2 v_2 = 0$$