Astronomie II
Beispiel 9

Heuritsch Julia (0904211), Kenn Michael (8725258)

8. April 2010

Aufgabenstellung :
Aufgabe war es, für einen radialen Dichteverlauf $\rho(r) \propto \rho \cdot r^{-n}$ einer selbstgravitierenden Molekülwolke E_{pot} und E_{th} herzuleiten und diese mittels Virial-Gleichgewicht $2E_{th} + E_{pot} = 0$ in Zusammenhang zu bringen.

Herleitung E_{pot} :
Die potentielle Energie E_{pot} einer radialen Masse mit Radius R_c ist gegeben durch

$$-E_{pot} = \int_0^{R_c} \frac{G \cdot M(r)}{r} dM(r)$$

mit $M(r)$ der Gesamtmasse innerhalb des Radius r. Aus der Angabe folgt

$$\begin{aligned}
M(r) &= \int 4\pi r^2 \rho(r) dr = \\
&= \int 4\pi \rho r^{2-n} dr = \\
&= 4\pi\rho \frac{r^{3-n}}{3-n} \\
M_c &= 4\pi\rho \frac{R_c^{3-n}}{3-n}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für die potentielle Energie

$$\begin{aligned}
-E_{pot} &= \int_0^{R_c} \frac{G}{r} \cdot 4\pi\rho \frac{r^{3-n}}{3-n} \cdot 4\pi\rho r^{2-n} dr = \\
&= G \cdot (4\pi\rho)^2 \cdot \frac{1}{3-n} \int_0^{R_c} r^{4-2n} dr = \\
&= G \cdot (4\pi\rho)^2 \cdot \frac{R_c^{5-2n}}{(3-n)(5-2n)} = \\
&= G \cdot (4\pi\rho \frac{R_c^{3-n}}{3-n})^2 \frac{3-n}{5-2n} \frac{1}{R_c} = \\
&= \frac{3-n}{5-2n} \frac{G \cdot M_c^2}{R_c} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Herleitung E_{th} :
Für die Herleitung der thermische Energie E_{th} benötigt man die Maxwell-Boltzmann'sche Geschwindigkeitsverteilung der einzelnen Moleküle

$$f(v) \quad = \quad \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

mit m Molekülmasse und v Geschwindigkeit eines Moleküls. Der Erwartungswert des Qadrates der Molekülgeschwindigkeit ist (nach kurzer Rechnung)

$$\langle v^2 \rangle = \sigma^2 \quad = \quad \frac{3kT}{m}$$

Die mittlere kinetische Energie eines Gasmoleküls (3 Freiheitsgrade) ist aber bekanntlich

$$E_{kin} = E_{th} \quad = \quad \frac{3kT}{2}$$

woraus für die Gesamtmasse M_c der Molekülwolke folgt:

$$E_{th} = \frac{M_c}{2}\sigma^2 \tag{2}$$

Zusammenhang E_{pot} und E_{th} :
Substituiert man (1) und (2) im Virial-Gleichgewicht $2E_{th} + E_{pot} = 0$ und setzt den Durchmesser $L = 2R_c$ so folgt der gewünschte Zusammenhang

$$\frac{2G \cdot M_c}{\sigma^2 \cdot L} \quad = \quad \frac{5-2n}{3-n} \tag{3}$$