Astronomie III
Aufgabe 10B

Heuritsch Julia (0904211), Kenn Michael (8725258)

11. Januar 2011

Seien O der Beobachtungsort, L die Gravitationslinse und S das zu beobachtende Objekt sowie d_{LS}, d_{OL} und d_{OS} die entsprechenden Distanzen, also $d_{OS} = d_{LS} + d_{OL}$. Der Einsteinradius in Radiant mit Variablen in SI-Einheiten ist dann gegeben durch

$$\theta_E = \sqrt{\left(\frac{4GM}{c^2}\frac{d_{LS}}{d_{OL}d_{OS}}\right)}$$

Umrechnen in Bogensekunden (arcsec), Mpc und $M_\odot$ liefert

$$\begin{aligned}
\theta_E &= \sqrt{\frac{M}{M_\odot}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{d_{LS}}{\mathrm{Mpc}}}{\frac{d_{OL}}{\mathrm{Mpc}}\frac{d_{OS}}{\mathrm{Mpc}}}} \cdot \sqrt{\frac{4GM_\odot}{c^2\,\mathrm{Mpc}}} \cdot \frac{360}{2\pi} \cdot 3600 \text{ arcsec} = \\
&= 9.026\,10^{-5} \cdot \sqrt{\frac{M}{M_\odot}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{d_{LS}}{\mathrm{Mpc}}}{\frac{d_{OL}}{\mathrm{Mpc}}\frac{d_{OS}}{\mathrm{Mpc}}}} \text{ arcsec}
\end{aligned}$$

Für $M = M_\odot$ und $d_{OS} = 2d_{LS}$ ergibt das

$$\theta_E = 9.026\,10^{-5} \cdot \left(\frac{d_{OS}}{\mathrm{Mpc}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Aus der Angabe folgt

$$v = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$$

Daraus ergeben sich folgende Distanzen

$$\begin{aligned}
z_{OS} = 2.0 \quad &\Rightarrow \quad v_S = \frac{4}{5}\,\mathrm{c} \Rightarrow d_{OS} = 3426\,\mathrm{Mpc} \\
z_{LS} = 0.5 \quad &\Rightarrow \quad v_L = \frac{5}{13}\,\mathrm{c} \Rightarrow d_{LS} = 1647\,\mathrm{Mpc}
\end{aligned}$$

sowie $d_{OL} = d_{OS} - d_{LS} = 1779\,\mathrm{Mpc}$. Einsetzen liefert die gesuchten Einsteinradien

$$\begin{aligned}
\theta_E &= 1.484\,10^{-6}\sqrt{\frac{M}{M_\odot}}\ \mathrm{arcsec} \\
\theta_E(10^{12}M_\odot) &= 1.484\ \mathrm{arcsec} \\
\theta_E(10^{15}M_\odot) &= 46.92\ \mathrm{arcsec}
\end{aligned}$$